

2016 年度 修士論文

格子上の標高データを用いた等高線の作成

法政大学大学院理工学研究科
システム理工学専攻修士課程

学生証番号 15R6201

氏名 イシゲ 石毛 タツヤ 達也

指導教員 五島洋行 教授

Abstract

Our purpose is to trace a contour in the form of a polygon. In this research, we use a bicubic spline function for interpolation of the elevation data on a grid. We construct the polygon as a data consisting of ordered contour points on sides of the grid. The contour enters a cell at an entry point and goes out at an exit point on its sides. The polygon is formed connecting these points. A problem occurs as to which two points should be connected when a cell of the grid has more than two contour points on its sides. As a solution, we view the bicubic spline function as a univariate cubic function with a parameter. From this perspective, we identify the exit point examining the behavior of the real roots of the cubic equation for the contour. Our method enables us to faithfully trace the contour of bicubic spline functions.

目次

第1章	はじめに	1
1.1.	研究背景	1
1.2.	先行研究	1
1.3.	研究目的	2
第2章	関連知識	5
2.1.	B-スプライン	5
2.2.	カルダノの公式	5
2.3.	スツルムの定理	6
第3章	数学的準備	7
3.1.	標高関数	7
3.2.	三次方程式の根	8
3.3.	根の挙動	10
第4章	提案手法	12
4.1.	標高関数の生成方法	12
4.2.	等高点をもつ格子セルの特定	14
4.2.1.	標高関数の座標変換	14
4.2.2.	等高点の選択	15
4.2.3.	次のセルの特定	36
第5章	ケーススタディ	37
第6章	おわりに	46
	参考文献	47
	謝辞	48

第 1 章 はじめに

1.1. 研究背景

明治初期から開始された近代技術による地図作成は、職人による膨大な手作業が必要なアナログ手法から、測量装置とソフトウェアによるデジタル手法に変化している。地図作成の工程には、測量と図化、編集がある。測量手法は、古くは平板測量であり、近代では航空写真測量が用いられている。図化手法は、職人による図化機を用いた手法から、図化を支援するソフトウェアを搭載したデジタル図化機が用いられている。そして、編集では、現地調査により明らかになった地名やデータの矛盾を整理し、紙地図に反映していた。現代では、図化の延長として、デジタル図化機に搭載されたソフトウェアによるデジタル編集が採用されている。これらの最先端の地図作成技術により、天候に左右されやすい現地作業等が大幅に短縮され、地図精度の向上とその均一化が図られるようになった。

地図作成において、地物や等高線は必要不可欠な要素であり、それらを描くためには、直線だけでなく四角形や円形、任意の曲線を描く必要があるため、経験によって積み重ねた高い技術が必要である。これらの解決のために航空レーザー測量とソフトウェアによる等高線の自動図化がある。航空レーザー測量を用いて、高い精度でビルや樹木といった地物を取り除いた地表の標高データを取得し、ソフトウェアによって等高線を描く方法が実際に運用されている[1]。

1.2. 先行研究

先駆的な研究として、Cottafava et al.[2] がある。彼らは、正方格子の辺上の等高点を比例按分により求め、それらをつなぐことにより等高線を作成している。しかし、比例按分により、等高点を算出しているため、正方格子の一辺上の等高点の数は、一点である。Lopes et al.[3] は、標高値を補間するために双一次スプライン関数を用いている。格子セル内の双曲線上の等高線の近似精度の向上のために、セル内の等高点をポリゴンに加えている。Maple [4] による *marching squares* は、あらかじめ定めた 16 のパターンに格子セル内の等高線を当てはめるものである。

これらの方法では、等高線が入り組んでいる場合、正確な再現が必ずしも可能とはかぎらない。この問題に対処するために、McCullagh [5] は、等高線が滑らかにセルを通過するように格子セルを細分している。一方、本研究では、格子セルを細分化することなく、等高線を作成する。まず、格子点上の標高値を補間し、正方格子辺と等高線の交点である等高点を算出する。次に、的確に等高点をつないでいくことにより、正確にポリゴンを形成する。正方格子点上の標高値をスプライン関数で補間する点は、Lopes et al.[3] と同様であるが、提案手法では双三次スプライン関数を用いる。その精度を最大限に活用することで、複雑な等高線にも対応することができる。その際の要となる考え方は、三次方程式の実根の順序を考慮し、等高点を正確につなぎ合わせることである。

1.3. 研究目的

本研究の目的は、対象とする標高の等高点を結ぶことにより、等高線をポリゴンとして求めることである。等高線をポリゴンとして得ることにより、ダム建設における土量計算や貯水量の推定などが期待される。図1のような正方格子の格子点上に標高値が与えられており、それらを図2のように双三次スプライン関数により補間する。一つの格子セルに注目すると、等高線がセルに入る入口点と、セルから出ていく出口点がある。これらの点をつなぎ、図3のようにポリゴンを作成する。セルの辺上の等高点が三点以上存在する場合、ある入口点に対し、どの等高点を出口点として選択するかという問題が生じる。勾配ベクトルを用いた既存の微分幾何的方法では、等高線がセル内で入り組んでいる場合、正確に次の等高点を選択するのは困難である。この解決策として、代数的アプローチを採用する。すなわち、双三次スプライン関数の二変数のうち一変数を固定することで、一変数の三次多項式とみなす。そして、三次方程式の解の挙動を見ることにより、次の等高点を選択する。これにより、正確に等高線をポリゴンとして作成していく。

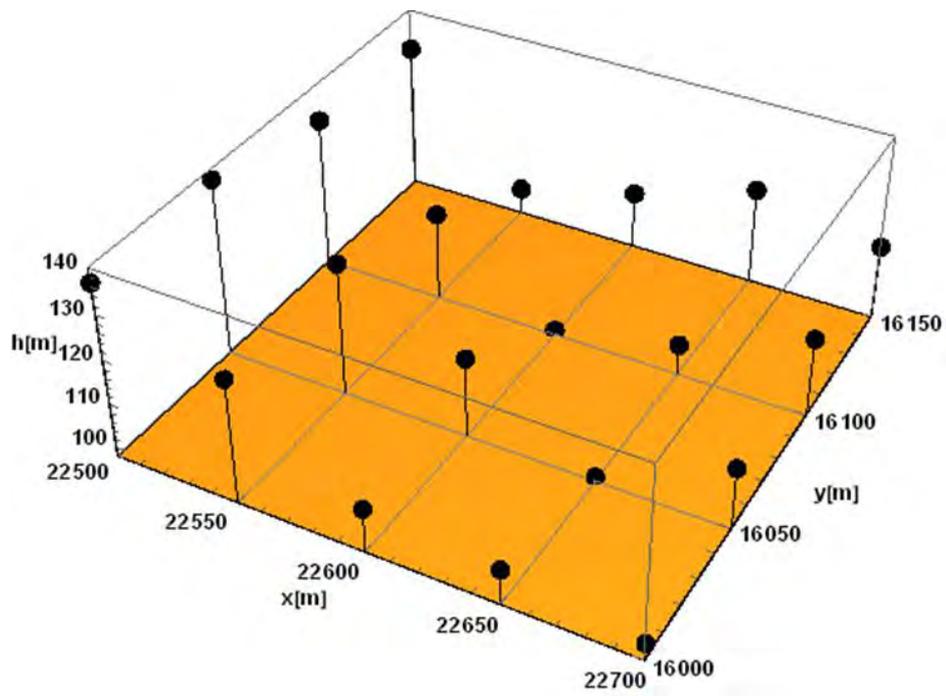


図 1: 離散的な標高データ.

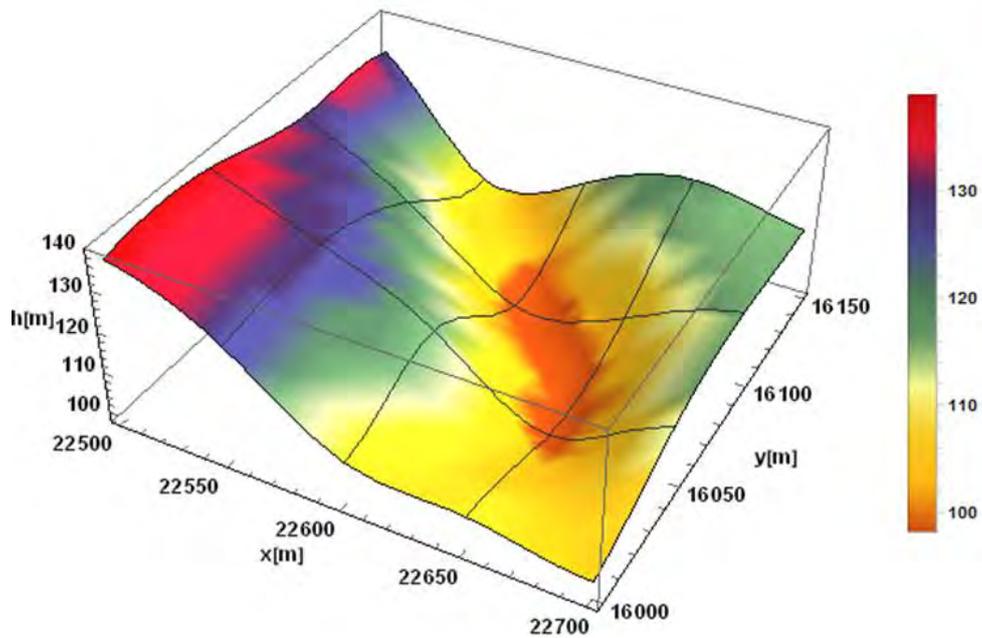


図 2: 離散的な標高データを用いた標高関数.

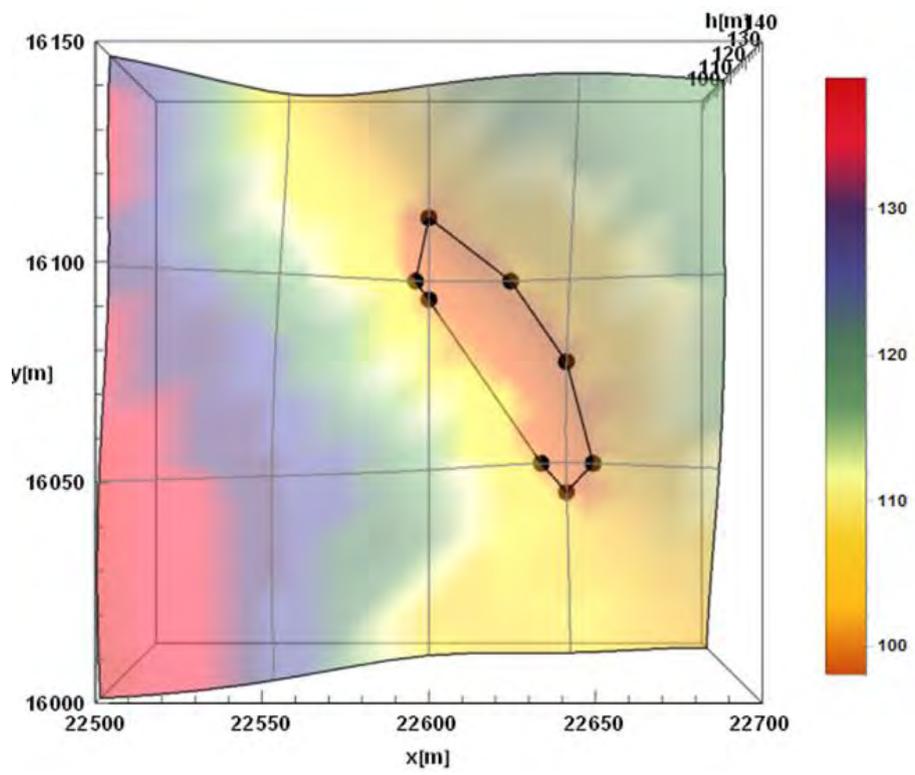


図 3: 注目している標高値の等高線のポリゴン.

第 2 章 関連知識

2.1. B-スプライン

B スプラインとは、局所的な台をもつ基底関数の一次結合で表されるものである。ここでいう台とは、関数の定義域のうち値が 0 と異なる領域である。一変数 B スプラインの基底関数は、

$$M_{k,i}(x) = M_k(x; \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k}) \quad (i=1, \dots, m), \quad (1)$$

となる。ここで、 x は位置座標、 $k-1$ は多項式スプライン関数の次数、 i は基底関数の位置を示す指数である。パラメータ $\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k}$ は、節点と呼ばれ、基底関数の滑らかさの調整に使われる。式(1)において、多重節点が存在しなければ、それぞれの節点において C^2 級となる[6]。

2.2. カルダノの公式

標高 h_0 の等高線は、 $h(x, y) = h_0$ の解曲線により表現される。この方程式の一変数をパラメータとして固定すると三次方程式となる。等高線を描くために、三次方程式のいくつかの性質を利用する。この節では、

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (2)$$

という一般的な三次方程式を考える。

$$x = x' - b/3a, \quad (3)$$

とおくことにより、

$$x'^3 + px' + q = 0, \quad (4)$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned} p &= -1/3(b/a)^2 + c/a, \\ q &= -2/27(b/a)^3 - bc/3a^2 + d, \end{aligned} \quad (5)$$

である。ここで、 ω と i は、それぞれ正の虚部をもつ 1 の三乗根と四乗根である。カルダノの公式を用いるため、

$$D = -q^2/4 - p^3/27, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} U &= \begin{cases} -q/2 + \sqrt{Di} & (D \geq 0) \\ -q/2 + \sqrt{|D|} & (D < 0) \end{cases} \\ V &= \begin{cases} \bar{U} & (D \geq 0) \\ -q/2 - \sqrt{|D|} & (D < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

$$u = \begin{cases} |U|^{1/3} \exp(1/3 (\text{Arg} U)i) & (D \geq 0) \\ U^{1/3} & (D < 0) \end{cases}, \quad (8)$$

$$v = \begin{cases} \bar{u} & (D \geq 0) \\ V^{1/3} & (D < 0) \end{cases},$$

とおく．式(4)の根は，

$$\begin{aligned} x'_1 &= \omega u + \omega^2 v, \\ x'_2 &= \omega^2 u + \omega v, \\ x'_3 &= u + v, \end{aligned} \quad (9)$$

となる．ただし，式(4)において $x_i = x'_i - b/3a$ ($i = 1, 2, 3$) である[7]．

2.3. スツルムの定理

スツルムの定理とは，区間内の多項式の実数根の個数を数え上げる方法である．スツルムの定理には，スツルム列を用いるのでスツルム列について説明する．スツルム列とは，実係数をもつ多項式 $f(x)$ と区間 $[a, b]$ が与えられたとき，以下の四つの条件を満足する実係数多項式の列である．

- 区間 $[a, b]$ 内のすべての点 x に対して，隣り合う二つの多項式は同時には 0 にならない．
- 区間 $[a, b]$ 内のある点 x_0 で $f_k(x_0) = 0$ であるならば， $f_{k-1}(x_0) f_{k+1}(x_0) < 0$ である．
- 列の最後の多項式 $f_1(x_0)$ は，区間 $[a, b]$ において一定の符号をもつ．
- ある点 x_0 で $f(x_0) = 0$ であるならば， $f'(x_0) f_1(x_0) > 0$ である．

本研究では，ユークリッドの互除法によるスツルム列の生成を行う．そのために，実係数をもつ多項式を $f_0(x) = f(x)$ ，多項式に微分を施した $f_1(x) = f'(x)$ とおいて，ユークリッドの互除法を割り算の剰余がなくなるまで続ける．区間 $[a, b]$ において，多項式の列がスツルム列をなし， $f(a) f(b) \neq 0$ であるとする．このとき， x を固定して関数値の列を左から右に見ていったときの符号の変化回数を $N(x)$ とすると，多項式 $f(x)$ の区間 $(a, b]$ 内に存在する零点の個数は，

$$n_0 = N(a) - N(b), \quad (10)$$

で与えられる[8]．

第 3 章 数学的準備

3.1. 標高関数

双三次スプライン関数を用いて、一辺 δ の $m \times n$ の正方格子点上の標高値を補間し、標高関数を構築する。様々な次数をもつ多項式スプライン関数が存在するなか、三次スプライン関数を用いる理由は、近似の精度と計算の簡潔さを両立させているからである。

本研究では、三次スプライン関数を構成するため、式(1)において $k=4$ とする。二つの変数 x, y について、基底関数のテンソル積をとることにより、双三次スプライン関数の基底関数を生成する。すなわち、二次元 B スプラインの基底関数は、 $M_{4,i}(x)M_{4,j}(y)$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$) となる。 (i, j) 番目の格子点の座標を $(x_i, y_j) = ((i-1)\delta, (j-1)\delta)$ とおく。そして、 $M_{4,i}(x)$ の節点を $\xi_{i+l} = x_{i+l}$ ($l=0, \dots, k$) とし、 $M_{4,j}(y)$ は $\xi_{j+l} = y_{j+l}$ ($l=0, \dots, k$) とする。具体的に $M_{4,i}(x)$ は、

$$M_{4,i}(x) = \sum_{l=-2}^2 \frac{\{|x_{i+l} - x| + (x_{i+l} - x)\}^3}{w'_l(x_{i+l})}, \quad (11)$$

と表される。ただし、 $w_l(x) = \prod_{l=-2}^2 (x - x_{i+l})$ である。同様に $M_{4,j}(y)$ は、変数を x から y に変更することにより得られる。図 4 に $M_{4,i}(x)$ の概形を表す。適切に基底関数の線形結合を行うことにより、双三次スプライン関数

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} M_{4,i}(x) M_{4,j}(y), \quad (12)$$

を得る[6].

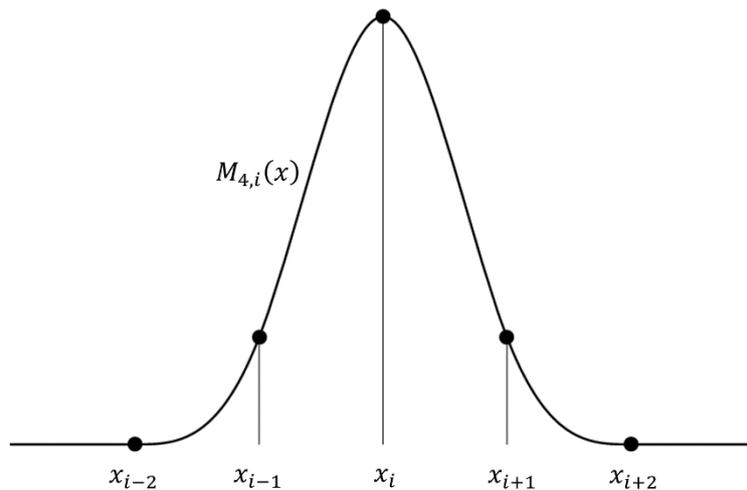


図 4: 一変数 B スプラインの基底関数.

3.2. 三次方程式の根

$D < 0$ の場合、方程式(4)は、一実根と二虚根をもつ。

$D > 0$ の場合は、 $\text{Im}(U) > 0$ すなわち $0 < \text{Arg}(U) < \pi$ であるので、 u と ωu 、 $\omega^2 u$ の偏角の範囲は、それぞれ $0 < \text{Arg}(u) < \pi/3$ 、 $2\pi/3 < \text{Arg}(\omega u) < \pi$ 、 $4\pi/3 < \text{Arg}(\omega^2 u) < 5\pi/3$ であることが図 5 よりわかる。したがって、異なる三実根 $x_1 < x_2 < x_3$ が得られる。 x_i の添え字 i は、左から数えた実根の順序と一致する。

$D = 0$ の場合、式(7)より $U = V = -q/2$ となる。そして $q < 0$ のとき、図 6 より x_3 が単根となり、 x_1 と x_2 が重根となる。一方、 $q > 0$ のとき、図 7 より x_1 が単根となり、 x_2 と x_3 が重根となる。

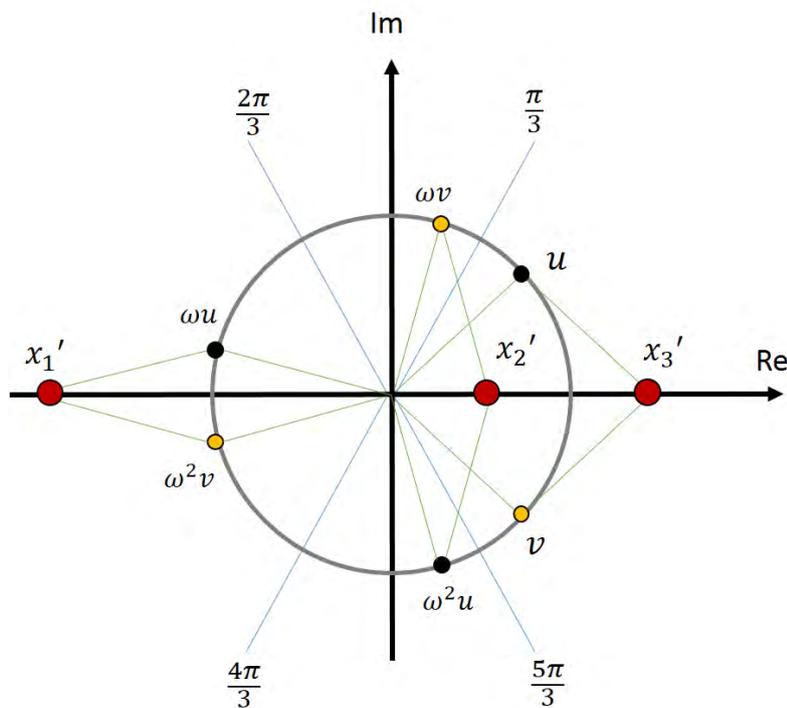


図 5: 異なる三実根 ($D > 0$).

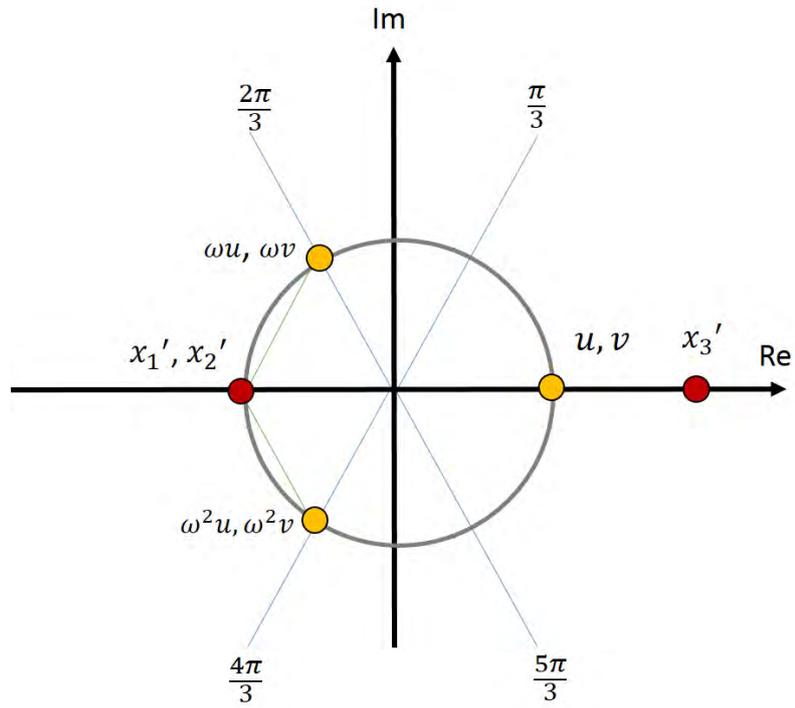


図 6: 単根と二重根 ($D = 0, q < 0$).

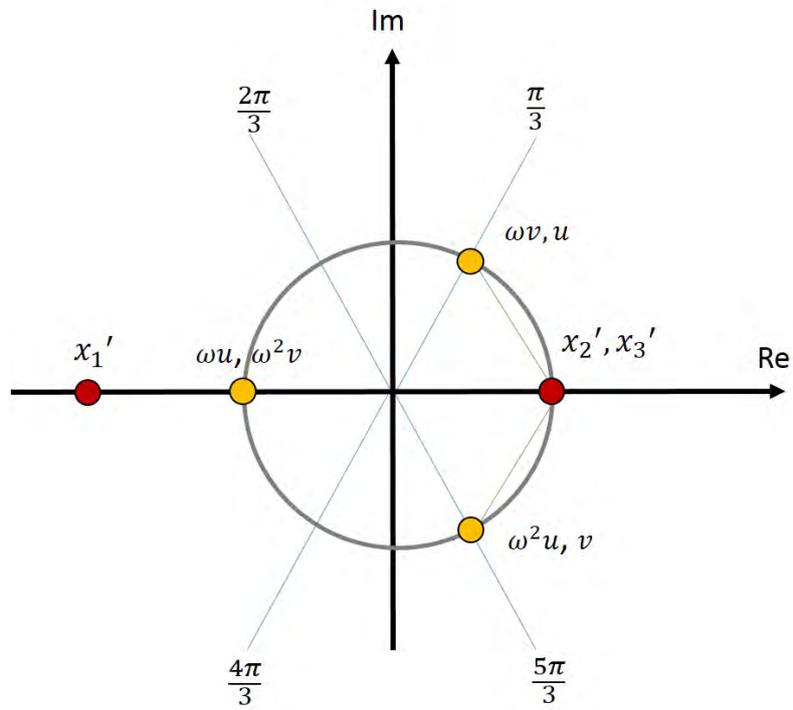


図 7: 単根と二重根 ($D = 0, q > 0$).

3.3. 根の挙動

一般に、パラメータ付けされた三次方程式

$$f(s, t) = a(t)s^3 + b(t)s^2 + c(t)s + d(t) = 0, \quad (13)$$

を考える. 方程式(13)の四つの係数は, $0 < t < 1$ の連続関数である. 方程式(13)の s の根を $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ により表し, それぞれは, 式(2)の x_1 , x_2 , x_3 と対応する. そして, q と D もまた, $0 < t < 1$ でパラメータ付けされる.

根の挙動は, 次のように分類される.

(i) $D(t) < 0$ の場合, $0 < t < 1$ で一実根と二虚根となる.

(ii) $D(t) > 0$ の場合, $0 < t < 1$ で異なる三実根 $s_1(t) < s_2(t) < s_3(t)$ を得る. さらに, 三実根の例外的な挙動について調べる.

(iii) $t = t_d$ で $D(t) = 0$ となる場合, $U(t_d) = V(t_d) = -q(t_d)/2$ となり, 方程式(13)は重根をもつ. さらに, $q(t_d) < 0$ の場合は, (ii) における $s_3(t_d)$ が単根となり, $s_1(t_d)$ と $s_2(t_d)$ が合流し重根となる. 一方, $q(t_d) > 0$ の場合は, $s_1(t_d)$ が単根となり, $s_2(t_d)$ と $s_3(t_d)$ が合流し重根となる.

(iv) $t = t_a$ で $a(t) = 0$ となる場合, 方程式(13)は二次方程式に退化する. 方程式(13)の s に $1/r$ を代入し, 次の方程式

$$d(t)r^3 + c(t)r^2 + b(t)r + a(t) = 0, \quad (14)$$

を得る. $a(t_a) = 0$ なので, (ii) の場合における方程式(14)の一つの根 $\varepsilon(t)$ は, t が t_a に近づくとつれ, 0 に近づく. 方程式(14)の根 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\varepsilon(t)$ は, 次の関係

$$\alpha(t) + \beta(t) + \varepsilon(t) = -c(t)/d(t), \quad (15)$$

$$\alpha(t)\beta(t) + \beta(t)\varepsilon(t) + \alpha(t)\varepsilon(t) = b(t)/d(t), \quad (16)$$

$$\alpha(t)\beta(t)\varepsilon(t) = -a(t)/d(t), \quad (17)$$

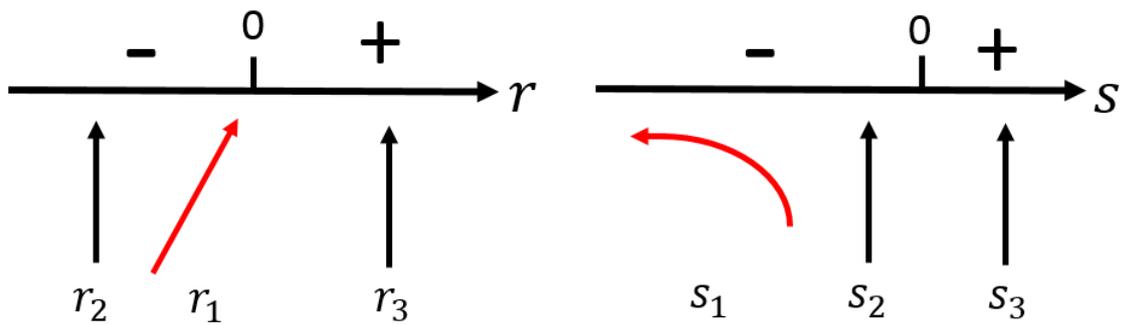


図 8: $t=t_a$ に近づくときの実根の挙動.

をもつ. $0 < |\varepsilon(t)| \ll 1$ を考慮し, 式(16)と(17)より $\alpha(t)\beta(t) \simeq b(t)/d(t)$ と $\varepsilon(t) \simeq -a(t)/b(t)$ を得る. そして $a(t)b(t) > 0$ の場合, $\varepsilon(t) < 0$ となる. t が t_a に近づくとき, 図 8 より方程式(13)の最も小さい根は, $s_1(t) = 1/\varepsilon(t) \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow t_a$) を満たす. 一方, $a(t)b(t) < 0$ の場合は, $\varepsilon(t) > 0$ となる. そして方程式(13)の最も大きい根は, $s_3(t) = 1/\varepsilon(t) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow t_a$) を満たす.

第4章 提案手法

本研究では、三次方程式の実根の挙動を考慮し、格子セルの辺上の等高点をつないでいくことで、等高線をポリゴンとして作成する。ポリゴンの作成過程において、等高線が格子セルの一边に入る等高点を入口点と呼ぶ。そして、等高線が格子セルの一边から出ていく等高点を出口点と呼ぶ。このアルゴリズムは、以下の四つのステップで構成される。

- (i) 双三次スプライン関数による標高値の補間,
- (ii) 等高点をもつ格子セルの特定,
- (iii) 等高点の座標を算出,
- (iv) 入口点に対応する出口点を選択.

ステップ(ii)では、スツルムの定理を用いて格子セルのそれぞれの辺上の等高点を数え上げる。そして、等高点をもつ格子セルを特定する。ステップ(iii)は、格子セルの辺上の等高点の座標を数値計算法等により算出する。ステップ(iv)では、入口点に対応する出口点を複数の等高点の中から選定し、その等高点をポリゴンに付け加える。このとき、格子セルの辺上の等高点の総数が二点であれば、入口点に対応する出口点は自動的に決まる。しかし、格子セルの辺上の等高点の総数が三点以上のとき、三次方程式の解の挙動により出口点を選択する。以下では、等高線作成に必要な要素について説明する。

4.1. 標高関数の生成方法

以下では、式(12)の係数 c_{ij} を定める方法を提案する。以下のような、変数 x , y それぞれの一次元Bスプライン関数の基底が要素となる行列 \mathbf{A} と \mathbf{B} を考える。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M_{4,1}(x_1) & M_{4,2}(x_1) & \cdots & M_{4,m}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ M_{4,1}(x_m) & M_{4,2}(x_m) & \cdots & M_{4,m}(x_m) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} M_{4,1}(y_1) & M_{4,2}(y_1) & \cdots & M_{4,n}(y_1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ M_{4,1}(y_n) & M_{4,2}(y_n) & \cdots & M_{4,n}(y_n) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

ただし、 (x_i, y_j) ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) は、格子点の場所を表す。格子点 (x_i, y_j) における標高は、 h_{ij} によって表される。格子点において、スプライン関数と標高値が一致することから、

$$h(x_i, y_j) = h_{ij}, \quad (20)$$

となる. すなわち, $\mathbf{c} = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{mn})^T$, $\mathbf{h} = (h_{11}, h_{12}, \dots, h_{mn})^T$ とすれば, 式(20)は,

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})\mathbf{c} = \mathbf{h}, \quad (21)$$

となる. さらに, 式(21)の左辺におけるテンソル積を使わずに, 次のように書ける.

$$\mathbf{ACB}^T = \mathbf{H}. \quad (22)$$

ただし,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

である. なぜなら, 式(21), (22)共に成分表示が

$$\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n a_{ip} b_{jq} c_{pq} = h_{ij}, \quad (24)$$

となるからである. $\mathbf{W} = \mathbf{CB}^T$ とおくと, 式(22)は, $\mathbf{AW} = \mathbf{H}$ となる.

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} w_{1j} \\ \vdots \\ w_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1j} \\ \vdots \\ h_{mj} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

を $j = 1, \dots, n$ まで解いて, 解を縦ベクトルとして並べたものが, \mathbf{W} である. そして, 式(25)の解を求めるために, LU 分解を用いる.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

という形の帯行列になることを利用して, 効率よく計算する. 同様に, $\mathbf{BC}^T = \mathbf{W}^T$ を LU 分解を用いて解くことで, \mathbf{C} が得られる. \mathbf{C} が求まることで, 式(12)の標高関数 $h(x, y)$ が得られる.

4.2. 等高点をもつ格子セルの特定

本節では、提案手法の等高線作成アルゴリズムのステップ(iv)について述べる。本研究では、ポリゴンの生成において、等高線が格子セルの辺上の等高点から格子セルに入ってきた場合、その等高点を入口点と呼ぶ。また、等高線が格子セルから出ていくときに、通る等高点を出口点と呼ぶ。出口点は、入口点と対応する。したがって、格子辺上に存在する等高点の数が 2 点の場合、自動的に入口点に対する出口点が決まる。しかし、そうでない場合には、以下の方法により、適切な出口点を選択する。

4.2.1. 標高関数の座標変換

アルゴリズムの簡単のために、新たな格子セルを考えるたびに、表 1 に明示されているような、 (x, y) から (s, t) という標高関数の座標変換を行う。注目する格子セルを (i, j) -セルとすると、その範囲は、 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (i-1)\delta \leq x \leq i\delta, (j-1)\delta \leq y \leq j\delta\}$ である。その結果として、セルは単位正方格子になるようにスケール変換され、入口点はセルの下辺に配置される。式(12)の変数 (x, y) を (s, t) に変換することで、

$$h_{ij}(s, t) = a_{ij}(t)s^3 + b_{ij}(t)s^2 + c_{ij}(t)s + d_{ij}(t), \quad (27)$$

と表される。式(27)の各係数は、 t の高々3次多項式である。 (i, j) -セルの領域は、 $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ により再定義される。ここで、 $f_{ij}(s, t) = h_{ij}(s, t) - h_0$ とおく。 (i, j) -セル内における標高 h_0 の等高線は、

$$f_{ij}(s, t) = 0, \quad (28)$$

の解曲線である。

表 1: 標高関数の座標変換.

入口点を含む辺の位置	s	t
南	$x/\delta - i + 1$	$y/\delta - j + 1$
西	$j - y/\delta$	$x/\delta - i + 1$
北	$i - x/\delta$	$j - y/\delta$
東	$y/\delta - j + 1$	$i - x/\delta$

4.2.2. 等高点の選択

以下, 図を用いて格子セルの辺上の等高点の中から出口点を選択する方法を説明する. 図では, 入口点を三角点で表し, 破線で囲まれた点を出口点とする.

(a) $D(t) < 0$ ($0 \leq t \leq 1$)の場合

図9のように, 格子セルの辺上に存在する等高点の中で, 最も小さい t をもつものを, 出口点として選択する.

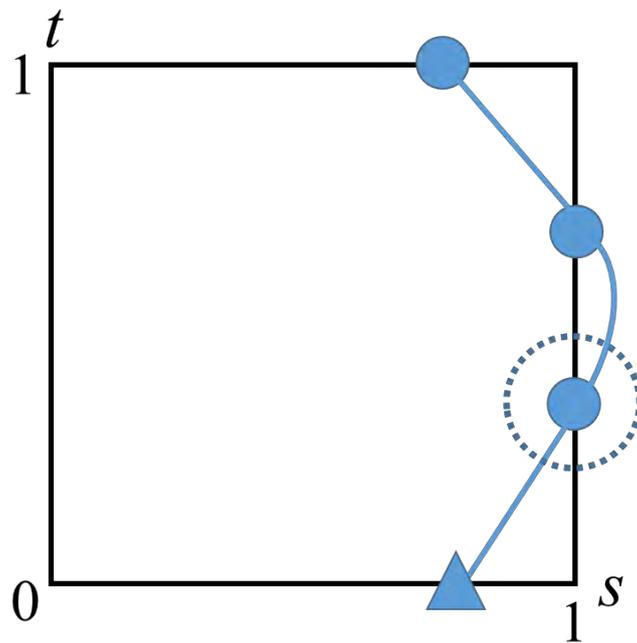


図 9: $D(t) < 0$ ($0 \leq t \leq 1$)の場合.

(b) $D(t) > 0$ ($0 \leq t \leq 1$)の場合

本研究では、三次方程式の根の数直線上の大小関係を根の順序と呼ぶ。三次方程式の根の順序を用いて、出口点を選択する。この場合の出口点は、格子セルの辺上に存在する等高点の中で、 s 座標が入口点と同じ順番の根であるもののうち、最も小さい t をもつものである。等高点の根の順番は、以下の方法によって、他の等高点の根の順番を調べることなく得られる。

以下の三次多項式関数

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma), \quad (\alpha < \beta < \gamma),$$

を考える。この関数に対し、微分を施すと、

$$f'(x) = (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \beta),$$

$$f''(x) = 2(3x - \alpha - \beta - \gamma),$$

となる。表 2 から分かるように、各関数の符号を見ることで、注目している等高点の根の順番を把握することができる。

図 10 を用いて、根の順序について説明する。右側のセルを (i, j) 番目セルと仮定し、破線は、方程式 $h_{ij}(s, t) - h_0 = 0$ により決まる等高線を表すとする。 $0 < t < 1$ において、方程式 $h_{ij}(s, t) - h_0 = 0$ は、三実根をもつ。これらの順序を、 $-\infty < s < +\infty$ の範囲で左から数える。点 A は、 $t = 0$ のとき二番目の実根であり、点 D は $t = 1$ のときの二番目の実根である。したがって、二番目の解曲線により表される等高線は、点 A から右側セルに侵入し、点 D を通りセルから出ていく。同様に、三番目の解曲線により表される等高線は、点 B から右側セルに侵入し、点 C を通りセルから出ていく。つまり、等高線のポリゴンの作成において、点 A の次には点 D が追加される。別の等高線のポリゴンでは、点 B の次に点 C が追加される。

表 2: 三実根の順序の特定.

導関数	α	β	γ
$f'(x)$	+	-	+
$f''(x)$	-	N/A	+

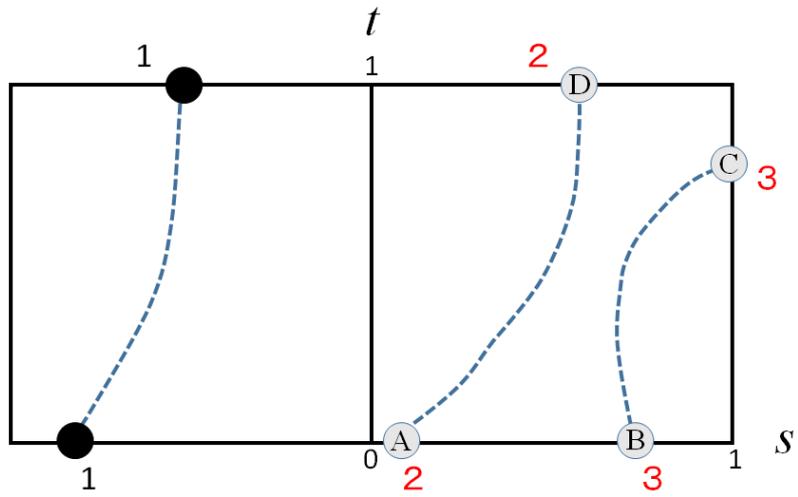


図 10: 実根の順序による等高点の選択.

(c) $D(t_d) = 0$ となる解 t_d ($0 < t_d < 1$) が存在する場合

出口点の選択方法は、 $D'(t_d)$ と $q(t_d)$ の符号によって変わる.

(i) $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) > 0$ の場合

図 11 のように、入口点の根の順番が 1 番のとき、 $t < t_d$ において根の順番が 1 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする. そのような等高点が存在しない場合には、図 12 のように、 $t > t_d$ において最小の t をもつ等高点を出口点とする.

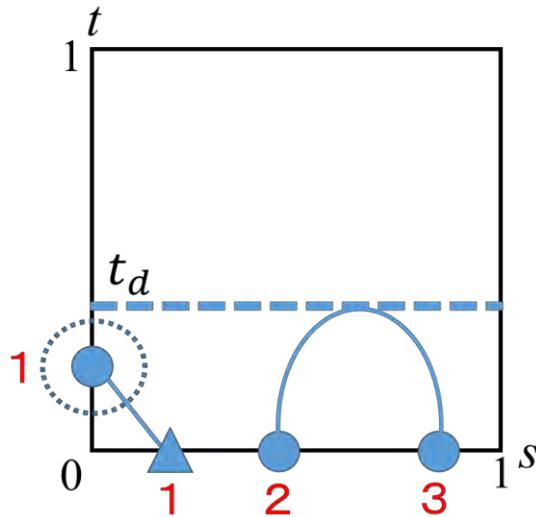


図 11: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) > 0$, 入口点の根の順序が 1 番の場合.

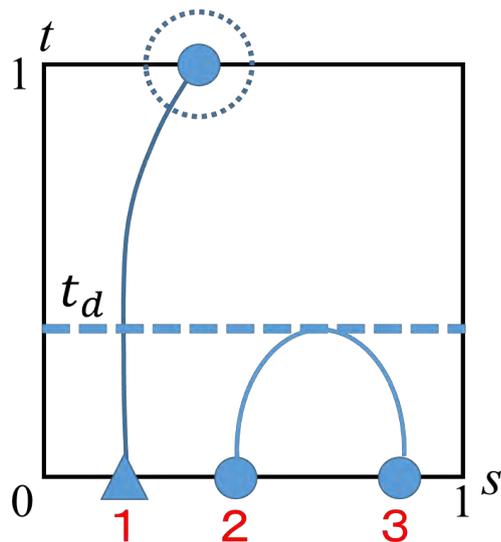


図 12: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) > 0$, 入口点の根の順序が 1 番の場合.

図 13 に示すように、入口点の根の順番が 2 番のとき、 $t < t_d$ において根の順番が 2 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 14 のように、 $t < t_d$ において最大の t をもち、根の順番が 3 番となる等高点を出口点とする。

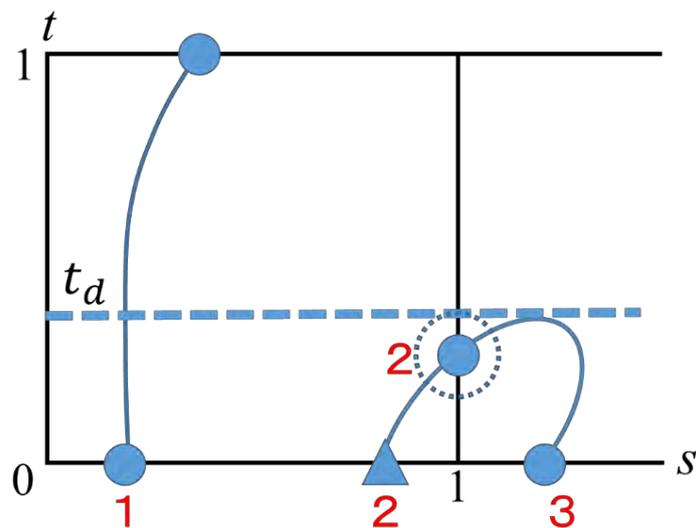


図 13: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) > 0$, 入口点の根の順序が 2 番の場合.

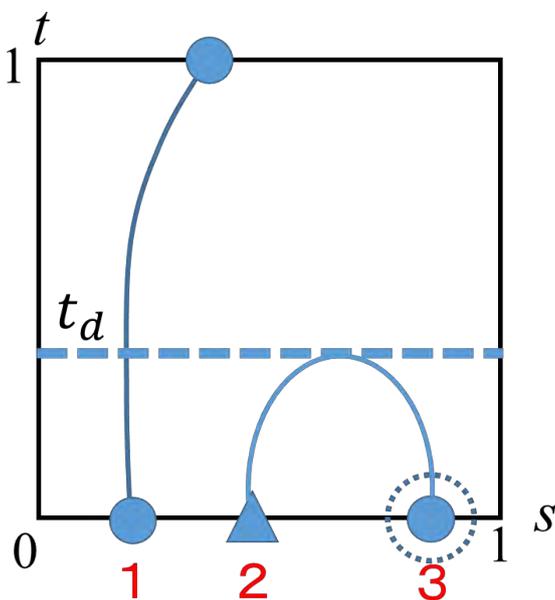


図 14: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) > 0$, 入口点の根の順序が 2 番の場合.

図 15 のように、入口点の根の順番が 3 番のとき、 $t < t_d$ において根の順番が 3 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 16 のように、 $t < t_d$ において最大の t をもち、根の順番が 2 番となる等高点を出口点とする。

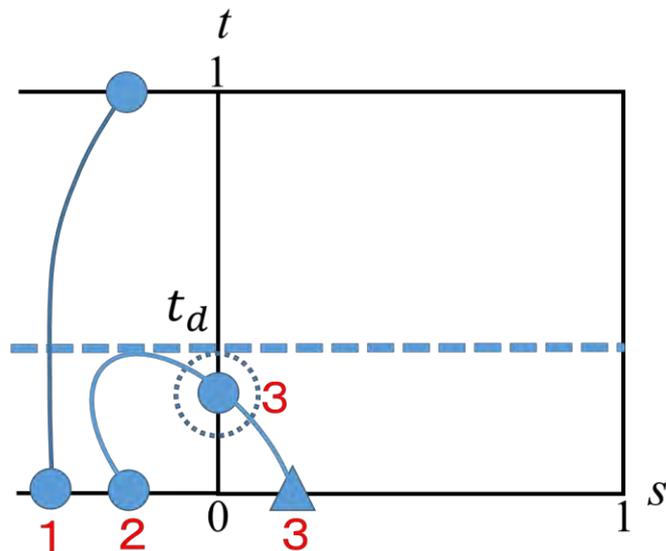


図 15: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) > 0$, 入口点の根の順序が 3 番の場合.

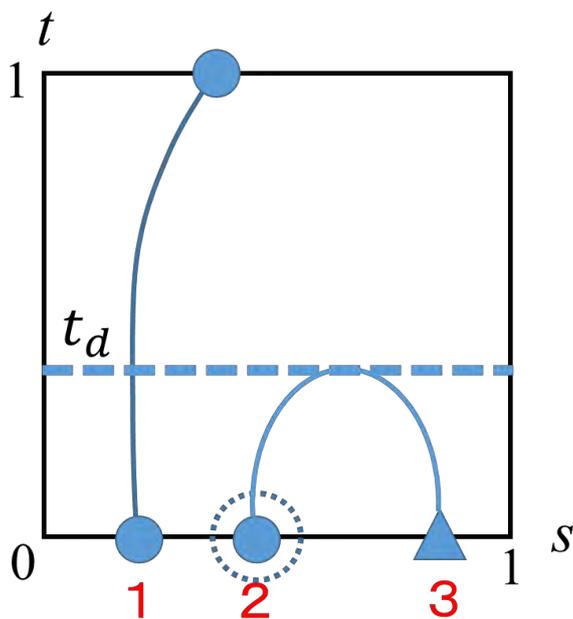


図 16: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) > 0$, 入口点の根の順序が 3 番の場合.

(ii) $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) < 0$ の場合

図 17 のように、入口点の根の順番が 3 番のとき、 $t < t_d$ において根の順番が 3 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 18 のように、 $t > t_d$ において最小の t をもつ等高点を出口点とする。

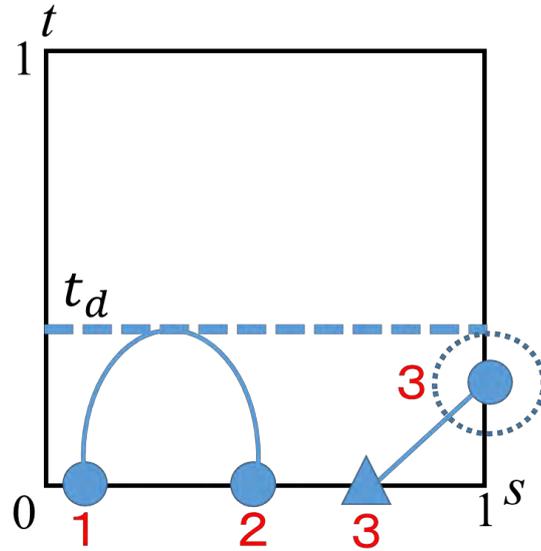


図 17: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) < 0$, 入口点の根の順序が 3 番の場合.

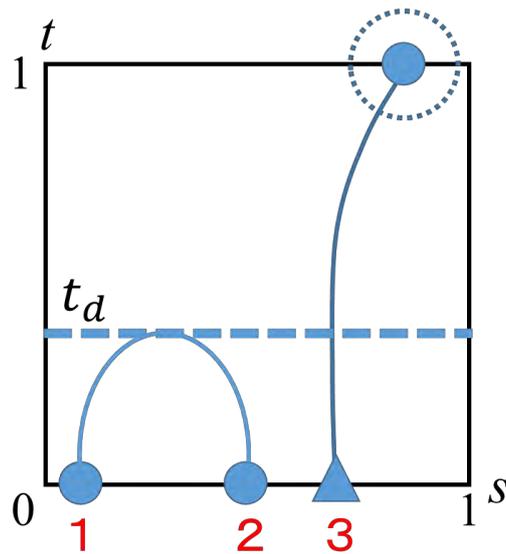


図 18: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) < 0$, 入口点の根の順序が 3 番の場合.

図 19 に示すように、入口点の根の順番が 1 番のとき、 $t < t_d$ において根の順番が 1 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 20 のように、 $t < t_d$ において最大の t をもち、根の順番が 2 番となる等高点を出口点とする。

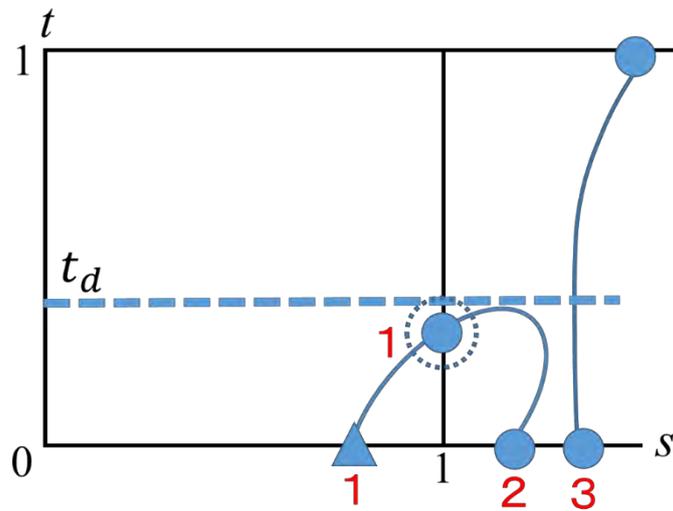


図 19: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) < 0$, 入口点の根の順序が 1 番の場合.

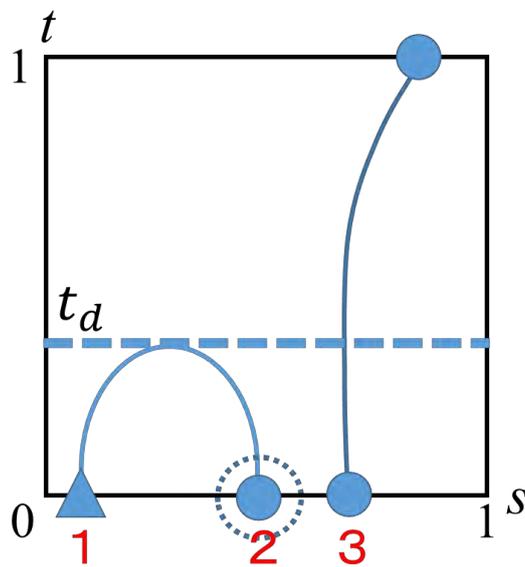


図 20: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) < 0$, 入口点の根の順序が 1 番の場合.

図 21 のように、入口点の根の順番が 2 番のとき、 $t < t_d$ において根の順番が 2 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 22 のように、 $t < t_d$ において最大の t をもち、根の順番が 1 番となる等高点を出口点とする。

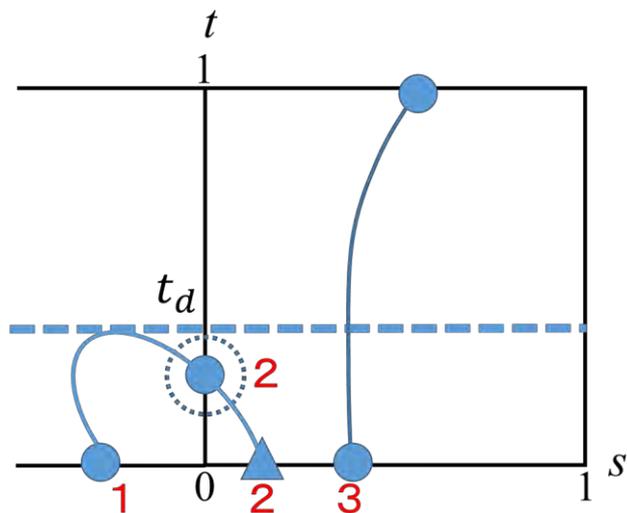


図 21: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) < 0$, 入口点の根の順序が 2 番の場合.

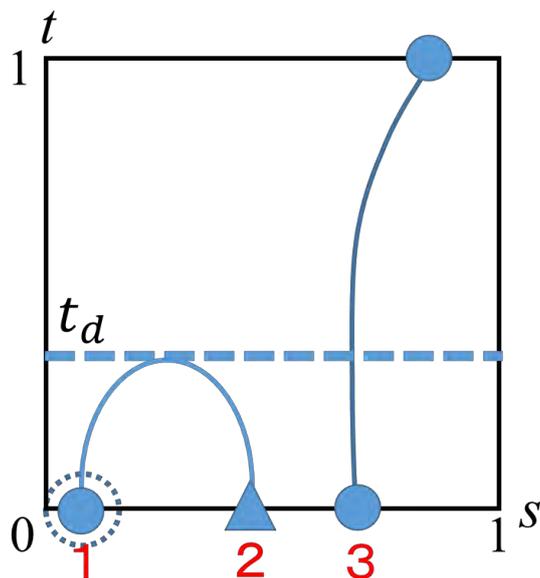


図 22: $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) < 0$, 入口点の根の順序が 2 番の場合.

(iii) $D'(t_d) > 0$ かつ $q(t_d) > 0$ の場合

図 23 のように、入口点以外の等高点の中で、 $t < t_d$ において最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 24 のように、 $t > t_d$ において最小の t をもち、根の順番が 1 番となる等高点を出口点とする。

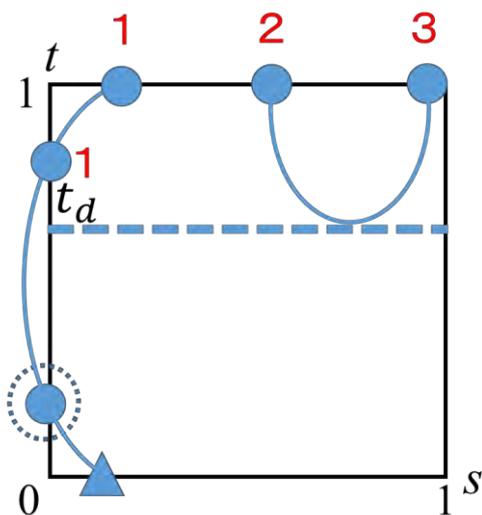


図 23: $D'(t_d) > 0$ かつ $q(t_d) > 0$ の場合.

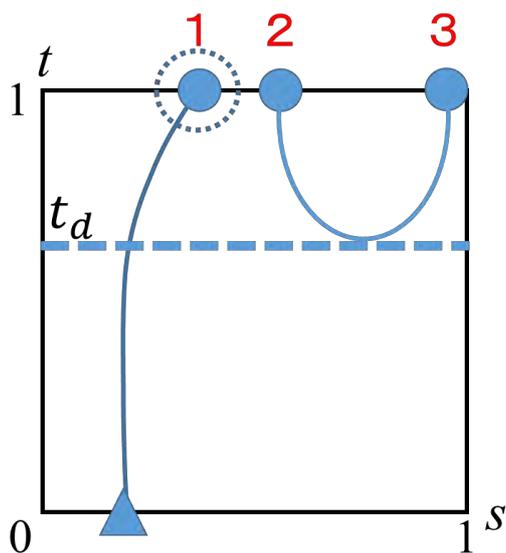


図 24: $D'(t_d) > 0$ かつ $q(t_d) > 0$ の場合.

(iv) $D'(t_d) > 0$ かつ $q(t_d) < 0$ の場合

図 25 のように、入口点以外の等高点の中で、 $t < t_d$ において最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 26 のように、 $t > t_d$ において最小の t をもち、根の順番が 3 番となる等高点を出口点とする。

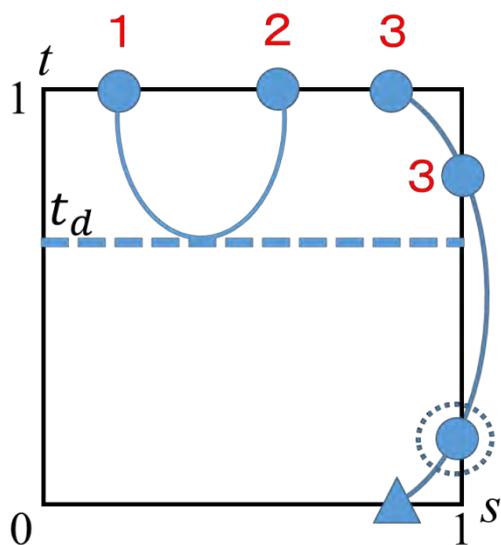


図 25: $D'(t_d) > 0$ かつ $q(t_d) < 0$ の場合.

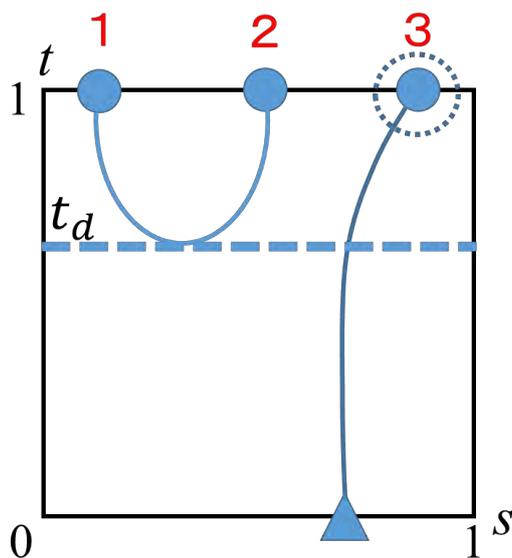


図 26: $D'(t_d) > 0$ かつ $q(t_d) < 0$ の場合.

(d) $a(t_a) = 0$ の解 t_a ($0 < t_a < 1$) が存在する場合

出口点の選択方法は、 $a'(t_a)b(t_a)$ と $D(t)$ の符号によって変わる.

(i) $D(t) < 0$ ($0 < t < 1$) の場合

図 27 のように、入口点以外の等高点の中で、 $t < t_a$ において最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする.

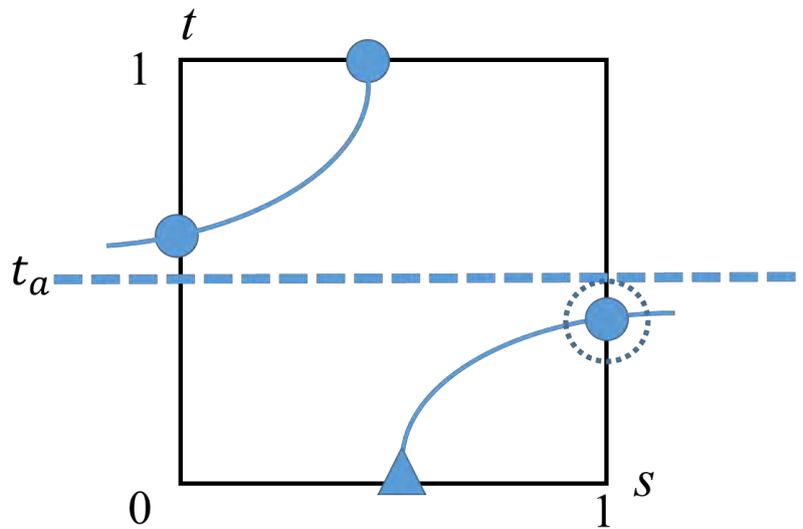


図 27: $a(t_a) = 0$ の解 t_a ($0 < t_a < 1$) が存在し、 $D(t) < 0$ の場合.

(ii) $a'(t_a)b(t_a) > 0$ かつ $D(t) > 0$ ($0 < t < 1$) の場合

図 28 のように、入口点の根の順番が 1 番のとき、 $t < t_a$ において根の順番が 1 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 29 のように、 $t > t_a$ において最小の t をもち、根の順番が 2 番となる等高点を出口点とする。

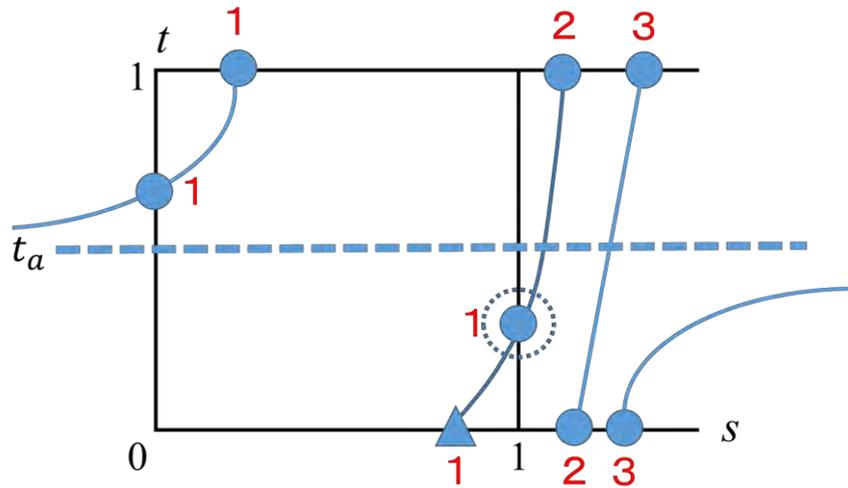


図 28: $a'(t_a)b(t_a) > 0$ かつ $D(t) > 0$, 入口点の根の順序が 1 番の場合.

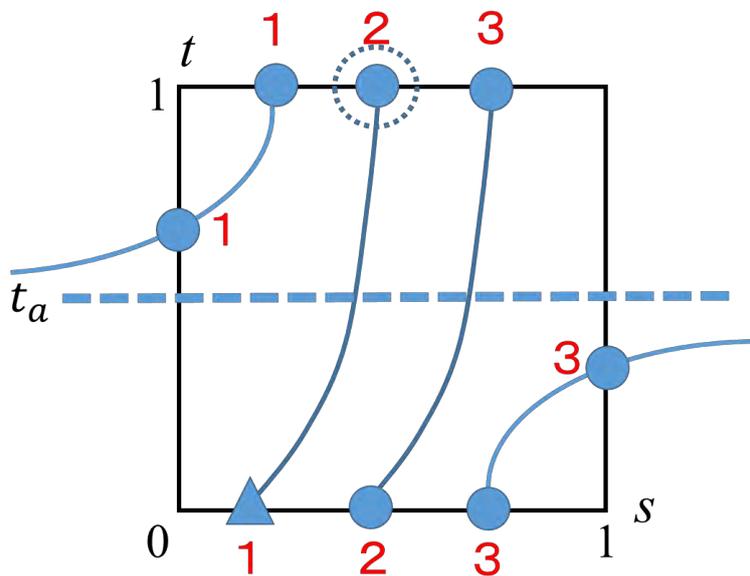


図 29: $a'(t_a)b(t_a) > 0$ かつ $D(t) > 0$, 入口点の根の順序が 1 番の場合.

図 30 のように、入口点の根の順番が 2 番のとき、 $t < t_a$ において根の順番が 2 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 31 のように、 $t > t_a$ において最小の t をもち、根の順番が 3 番となる等高点を出口点とする。

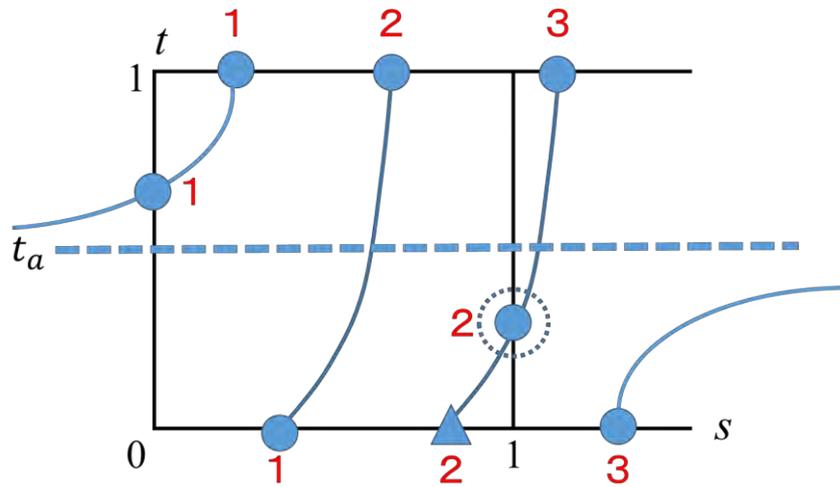


図 30: $a'(t_a)b(t_a) > 0$ かつ $D(t) > 0$, 入口点の根の順序が 2 番の場合.

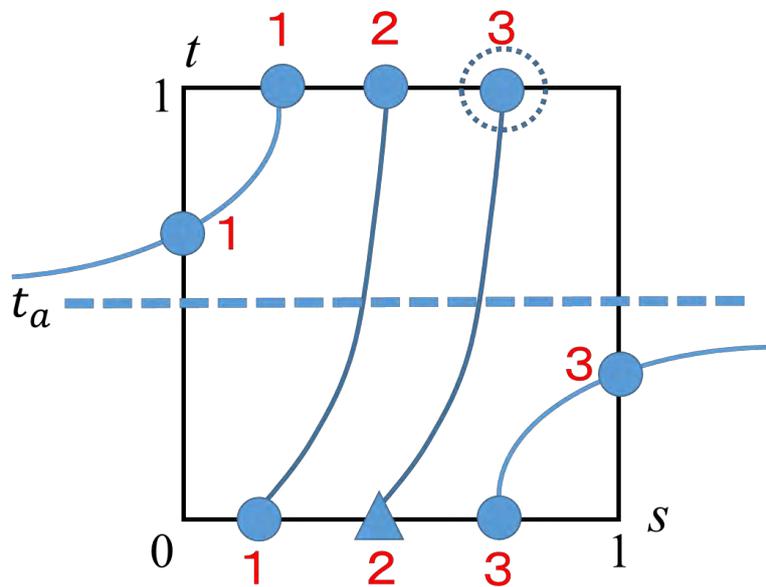


図 31: $a'(t_a)b(t_a) > 0$ かつ $D(t) > 0$, 入口点の根の順序が 2 番の場合.

図 32 に示すように、入口点の根の順番が 3 番のとき、 $t < t_a$ において根の順番が 3 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。

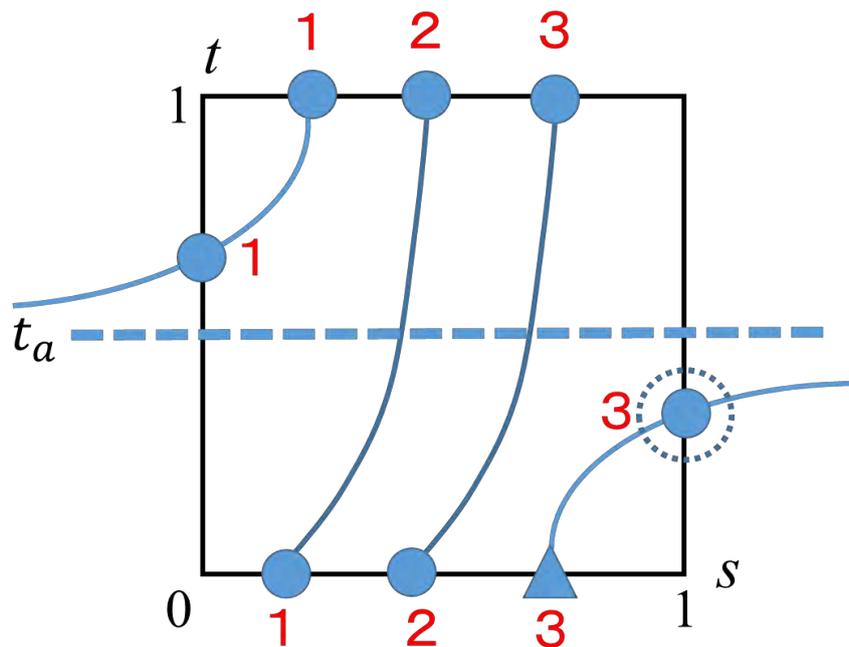


図 32: $a'(t_a)b(t_a) > 0$ かつ $D(t) > 0$, 入口点の根の順序が 3 番の場合.

(iii) $a'(t_a)b(t_a) < 0$ かつ $D(t) > 0$ ($0 < t < 1$) の場合

図 33 のように、入口点の根の順番が 2 番のとき、 $t < t_a$ において根の順番が 2 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合には、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 34 のように、 $t > t_a$ において最小の t をもち、根の順番が 1 番となる等高点を出口点とする。

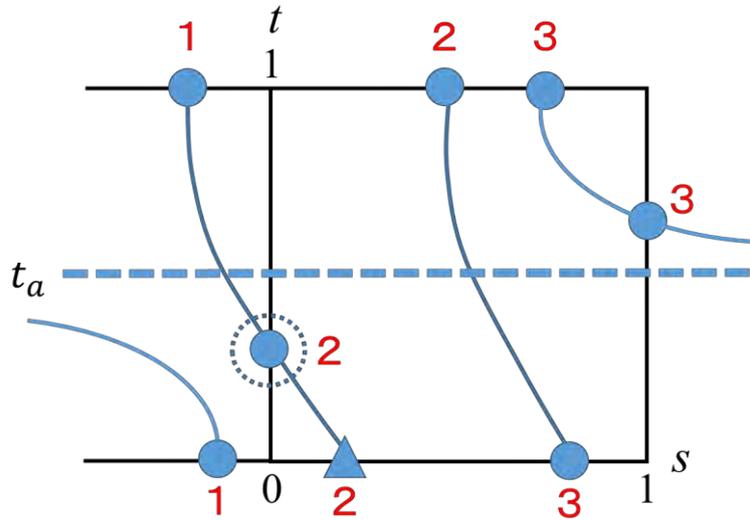


図 33: $a'(t_a)b(t_a) < 0$ かつ $D(t) > 0$, 入口点の根の順序が 2 番の場合.

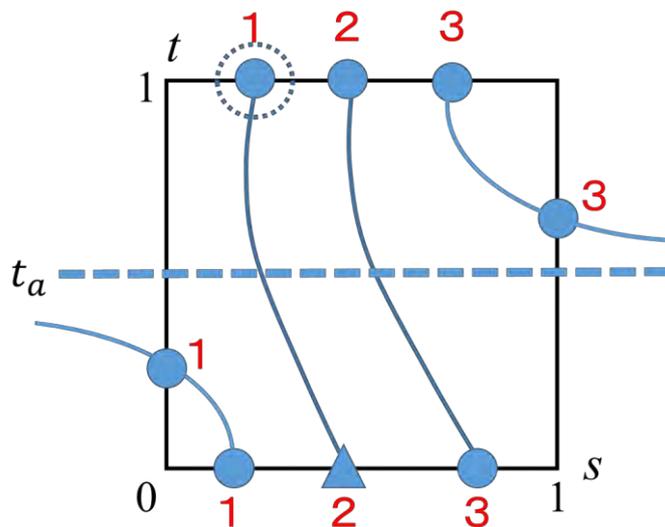


図 34: $a'(t_a)b(t_a) < 0$ かつ $D(t) > 0$, 入口点の根の順序が 2 番の場合.

図 35 のように、入口点の根の順番が 3 番のとき、 $t < t_a$ において根の順番が 3 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。そのような等高点が存在しない場合には、図 36 のように、 $t > t_a$ において最小の t をもち、根の順番が 2 番となる等高点を出口点とする。

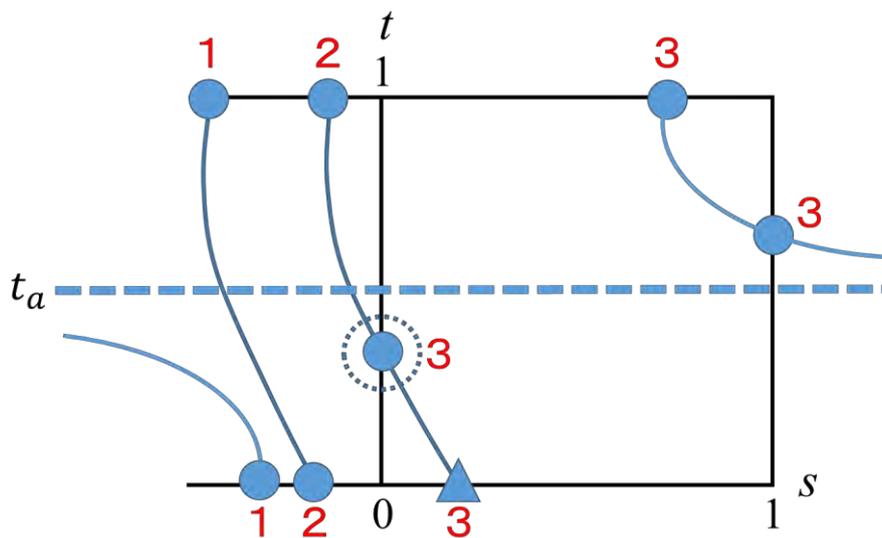


図 35: $a'(t_a)b(t_a) < 0$ かつ $D(t) > 0$, 入口点の根の順序が 3 番の場合.

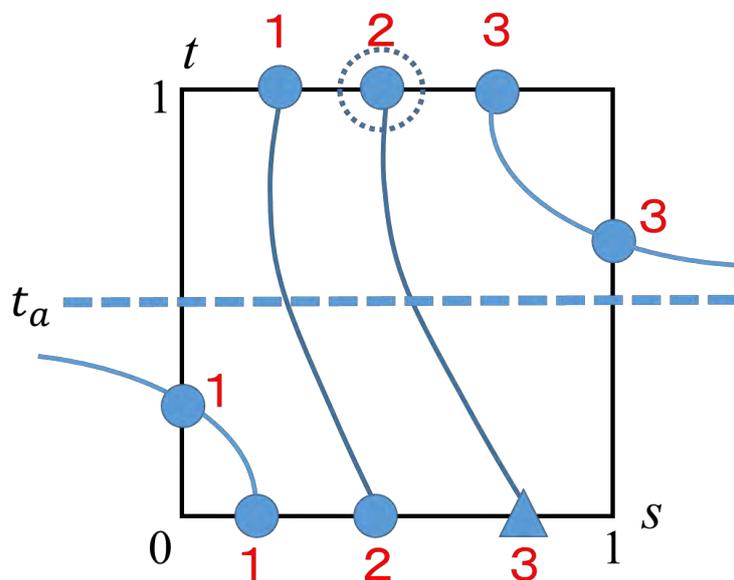


図 36: $a'(t_a)b(t_a) < 0$ かつ $D(t) > 0$, 入口点の根の順序が 3 番の場合.

図 37 のように、入口点の根の順番が 1 番のとき、 $t < t_a$ において根の順番が 1 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とする。

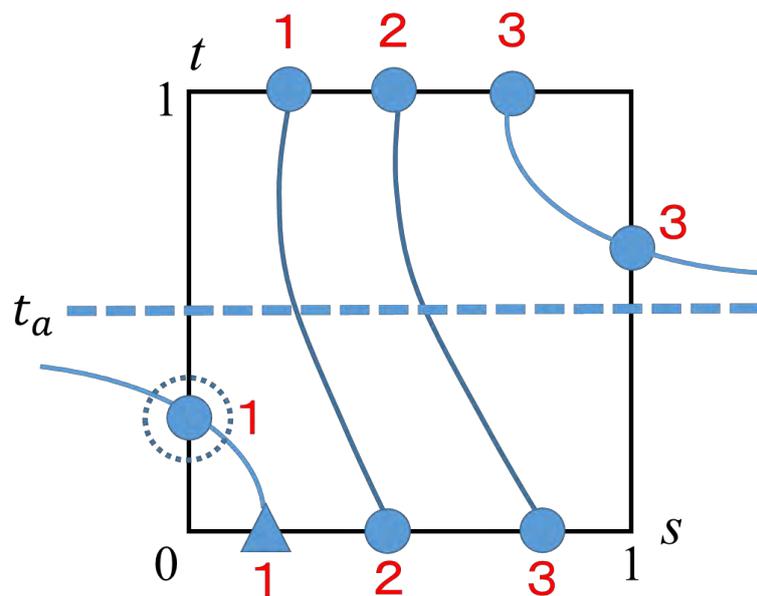


図 37: $a'(t_a)b(t_a) < 0$ かつ $D(t) > 0$, 入口点の根の順序が 1 番の場合.

(e) $D(t_d) = 0$ と $a(t_a) = 0$ となる解 t_d, t_a ($0 < t_d, t_a < 1$) が存在する場合

t_d と t_a の大小関係による順番に従って, (c) と (d) の手続きをおこなう. 一般に, $D(t) = 0$ または $a(t) = 0$ となる t が $0 < t < 1$ において, 複数存在する場合は, それぞれの手続きを適切に複合させて実行する.

たとえば, $D(t_d) = 0$ と $a(t_a) = 0$ となる解 t_d, t_a が一つずつ存在する格子セルを考える. このとき, 格子セルは, $a'(t_a)b(t_a) > 0$ かつ $D(t) > 0$ ($0 < t < t_d$) であり, $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) < 0$ とする. この場合, 実行すべき手続きは, (d)-(ii) と (c)-(ii) を複合させたものになる.

図 38 のように, 根の順番が 1 番の入口点を考える. まず, (d)-(ii) の手続きをおこなう. $0 < t < t_a$ において根の順番が 1 番となる等高点の中で, 最小の t をもつ等高点は存在しない. したがって, 入口点を含む解関数は, $t_a < t < t_d$ において根の順番が 2 番となる解関数に接続される. 次に, (c)-(ii) の手続きをおこなう. いま, $t > t_a$ において, 根の順番が 2 番となる解関数に接続されており, 入口点の根の順番を 2 番とみなす. 入口点の根の順番が 2 番のとき, $t_a < t < t_d$ において根の順番が 2 番となる等高点の中で, 最小の t をもつ等高点が存在する場合に, その点を出口点とするが, そのような等高点は存在しない. したがって, $t_a < t < t_d$ において最大の t をもち, 根の順番が 1 番となる等高点を出口点とする.

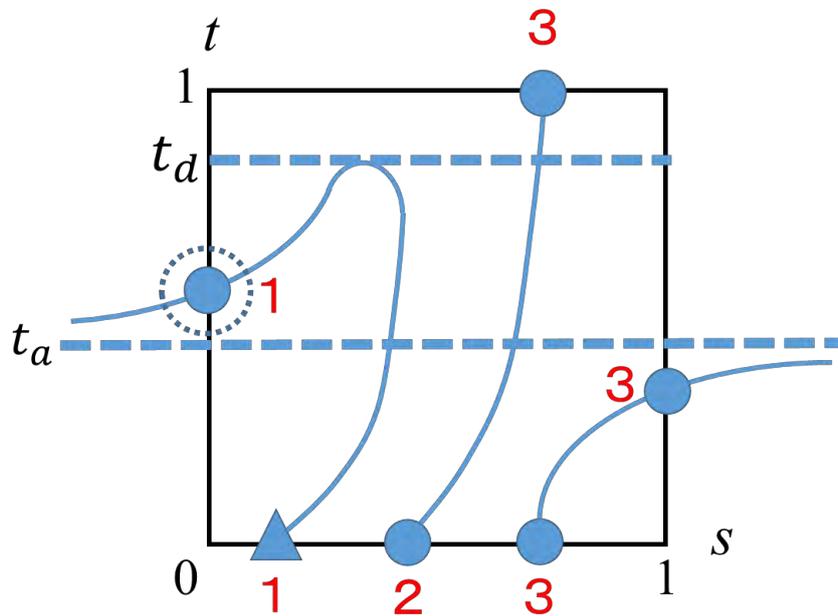


図 38: (d) – (ii) かつ入口点の根の順序が 1 番の場合, (c) – (ii) かつ入口点の根の順序が 2 番の場合.

図 39 のように、根の順番が 2 番の入口点を考える．まず、(d)-(ii)の手続きをおこなう． $0 < t < t_a$ において根の順番が 2 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在しない．したがって、入口点を含む解関数は、 $t_a < t < t_d$ において根の順番が 3 番となる解関数に接続される．次に、(c)-(ii)の手続きをおこなう．いま、 $t > t_a$ において、根の順番が 3 番となる解関数に接続されており、入口点の根の順番を 3 番とみなす．入口点の根の順番が 3 番のとき、 $t_a < t < t_d$ において根の順番が 3 番となる等高点の中で、最小の t をもつ等高点が存在する場合に、その点を出口点とするが、そのような等高点が存在しない．したがって、 $t > t_d$ において最小の t をもつ等高点を出口点とする．

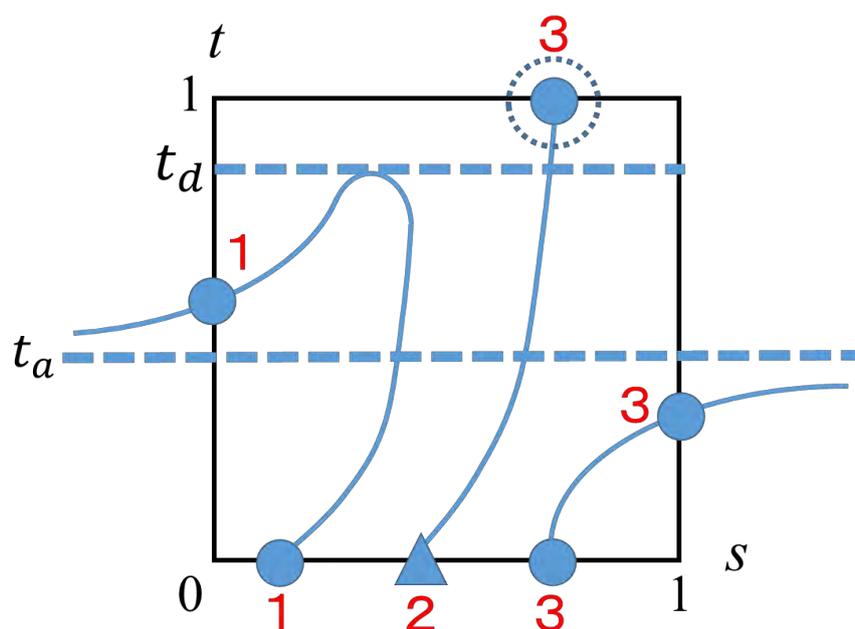


図 39: (d) – (ii)かつ入口点の根の順序が 2 番の場合、(c) – (ii)かつ入口点の根の順序が 3 番の場合.

図 40 のように、根の順番が 3 番の入口点を考える．まず，(d)-(ii)の手続きをおこなう． $0 < t < t_a$ において根の順番が 3 番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在するためその点を出口点とする．

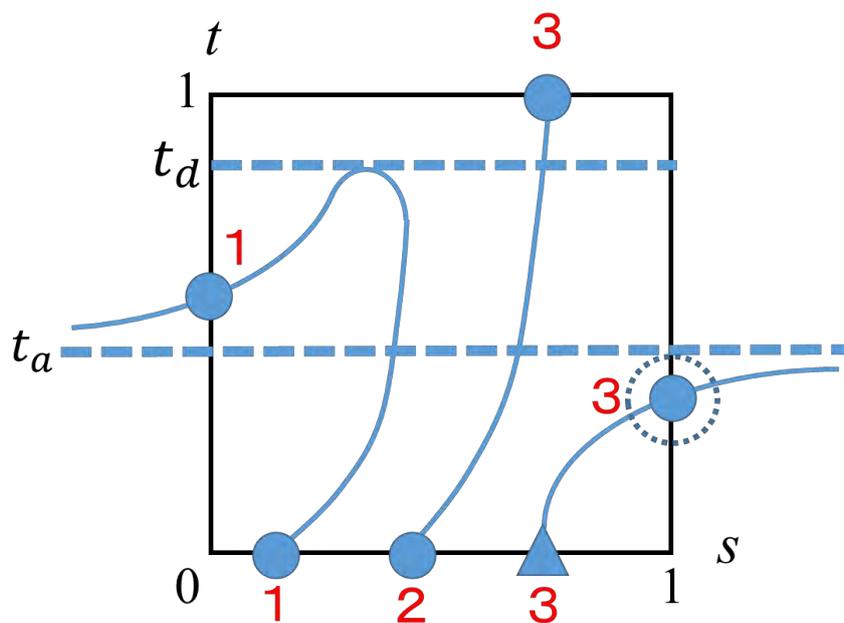


図 40: (d) – (ii)かつ入口点の根の順序が 3 番の場合.

4.2.3. 次のセルの特定

等高線のポリゴン作成は、最初の格子セルにおける入口点から始め、今のセルの入口点と出口点を正しくつなぎ、その出口点をポリゴンに加える。この過程を最初の格子セルに戻るまで繰り返し実行する。この過程において、今のセルの出口点または次のセルの入口点が存在する新たな格子セルを選択する必要がある。つまり、今のセルの出口点を入口点とする次のセルに移動する。等高点が格子セルの頂点に存在していなければ、今のセルと次のセルは辺を共有する。この場合、次のセルは自明である。

しかし、出口点が頂点にある場合、次のセルは、等高線に直交する標高関数の勾配ベクトルにより決まる。すなわち、勾配ベクトルが t 方向に向いている場合、今のセルに s 方向に隣接する格子セルが次のセルとなる。勾配ベクトルが s 方向に向いている場合、今のセルに t 方向に隣接する格子セルが次のセルとなる。勾配ベクトルの方向が s 方向でも t 方向でもない場合、今のセルに対して斜めに隣接する格子セルが次のセルとなる。次のセルが決まるたびに、4.2.1 の座標変換をおこなう。

第 5 章 ケーススタディ

本章において作成する地図は、(一財)日本地図センターが作成した「JMC50mメッシュ (標高)」を使用する。このデータは、国土交通省国土地理院が提供する基盤地図情報 (数値標高モデル) 10m メッシュを基として、国土地理院が刊行していた数値地図 50m メッシュ (標高) と同等のデータとしたものである。さらに、標準地域メッシュ (2 次メッシュ) を経度方向および緯度方向に、それぞれ 200 等分して得られる各区域、つまり 2 万 5 千分 1 地形図上で約 $2\text{mm} \times 2\text{mm}$ の中心の標高が記録されている。標高値の間隔は、緯度つまり南北方向で 1.5 秒、経度つまり東西方向で 2.25 秒となり、実距離で約 $50\text{m} \times 約 50\text{m}$ となる。ファイル形式に関しては、MEM 形式が採用されている。この形式は数値地図 50m メッシュ (標高) に準拠しているが、数値地図 50m メッシュ (標高) と異なり、世界測地系の 2 次メッシュとなっているため、日本測地系の座標は記録していない。世界測地系の 2 次メッシュ単位で、一つのファイルになっているため、使用したい地域が複数の 2 次メッシュをまたがる場合は、データの重ね合わせが必要である。標高値のデータの海部における値は、 -999.9m となっているが、 -1m に変更した[9]。

ケーススタディとして、鹿児島県の南部に位置する屋久島のデータにアルゴリズムを適用し、等高線を描いていく。JMC50m メッシュ (標高) のうち、屋

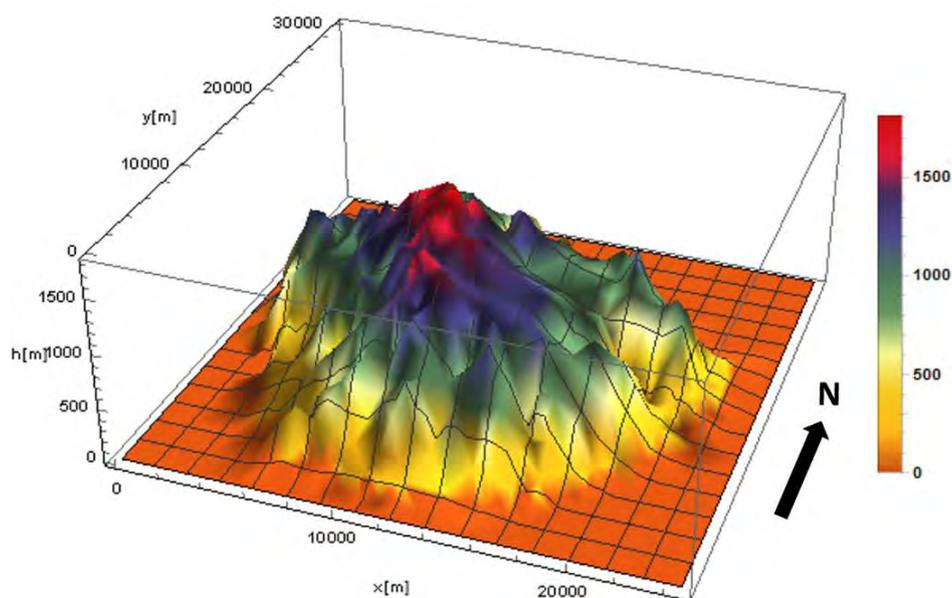


図 41: 双三次スプライン関数による標高関数.

久島を表す 498×598 の格子セルによって構成される標高値のデータを扱う．屋久島の最高標高値は 1935m である．

提案手法におけるステップ(i)のために， $m = 498$ ， $n = 598$ ，そして $\delta = 50$ と設定し，双三次スプライン関数による標高値の補間をおこなう．図 41 は，標高値の補間後の標高関数を表している．アルゴリズム全体の結果として，図 42 には，標高 0m から 1900m までの等高線が 100m 間隔ごとに描かれている．

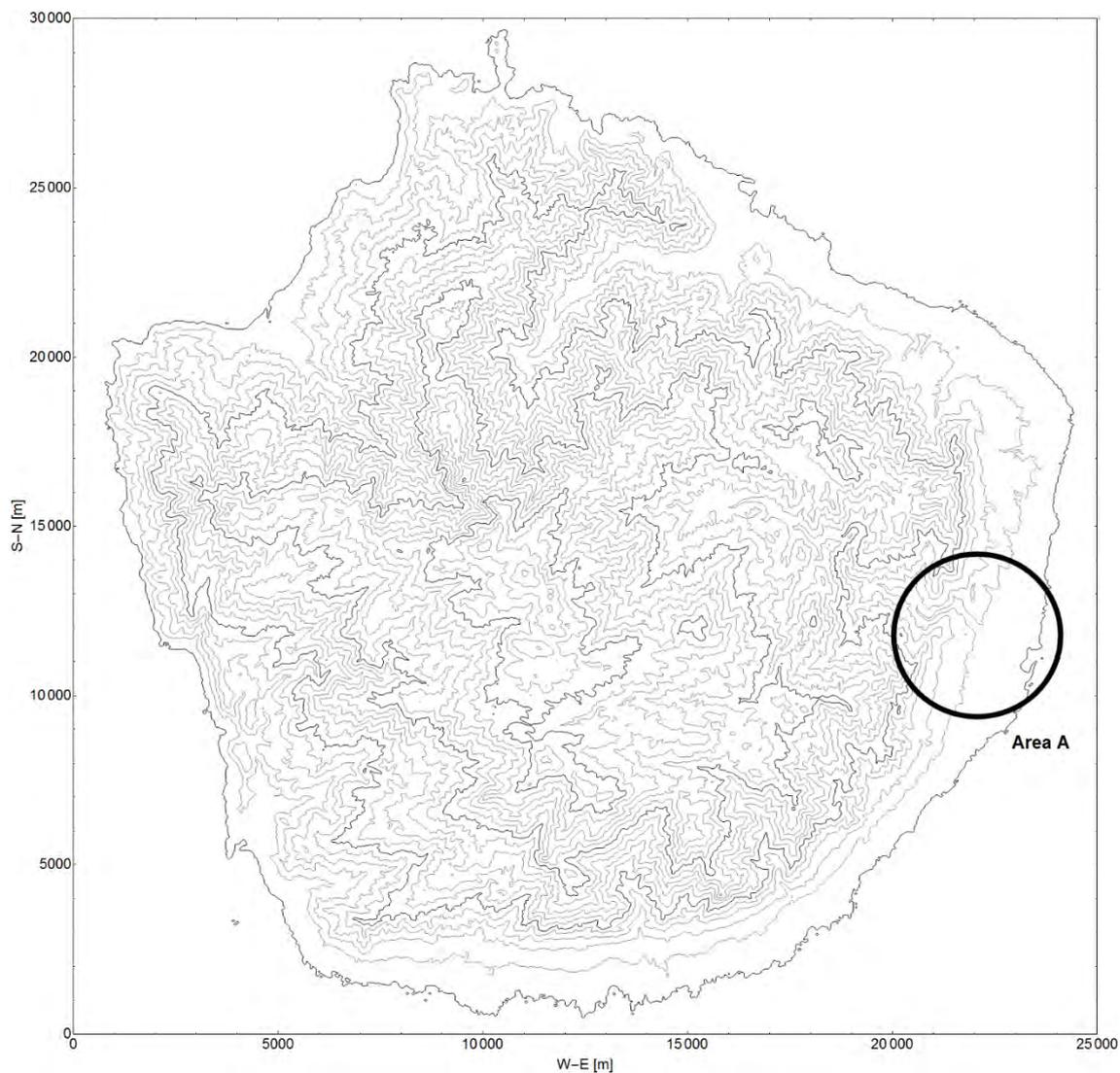


図 42: 屋久島の等高線.

図 43 は、等高線がポリゴンで構成されていることを確認するために図 42 における範囲 A を拡大したものであり、標高 0m から 100m を 10m 間隔で表示している。このスケールによれば、点と線分で構成されるポリゴンの辺が確認できる。

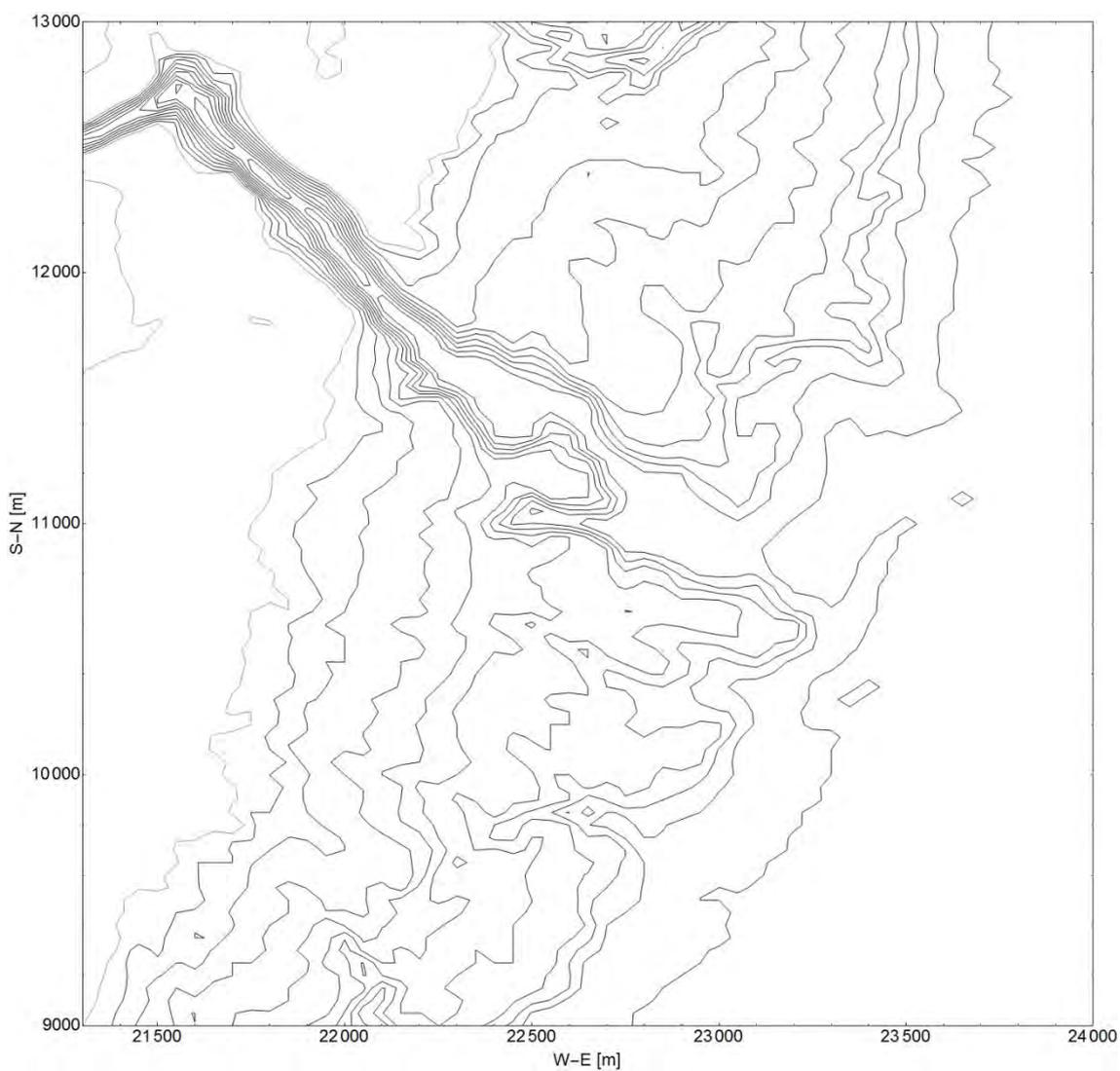


図 43: 範囲 A における屋久島の等高線.

双三次スプラインの双一次スプラインに対する優越性を論じることは、この研究の範囲外であるが、屋久島の一部において二つのスプライン補間の比較を図 44 に示す。双三次スプラインによる標高関数の等高線を黒色点で表し、双一次スプラインについては灰色点で表す。本アルゴリズムによるポリゴンを黒色線と黒色点で表し、Lopes et al.[3]によるポリゴンは、灰色破線と灰色点とし、図 45 に示す。図 45 を見ると、二つの方法がスプライン関数の等高線を忠実にポリゴンとして表現していることが確認できる。結果として、双三次スプラインの利点が本アルゴリズムによるポリゴンに反映されている。

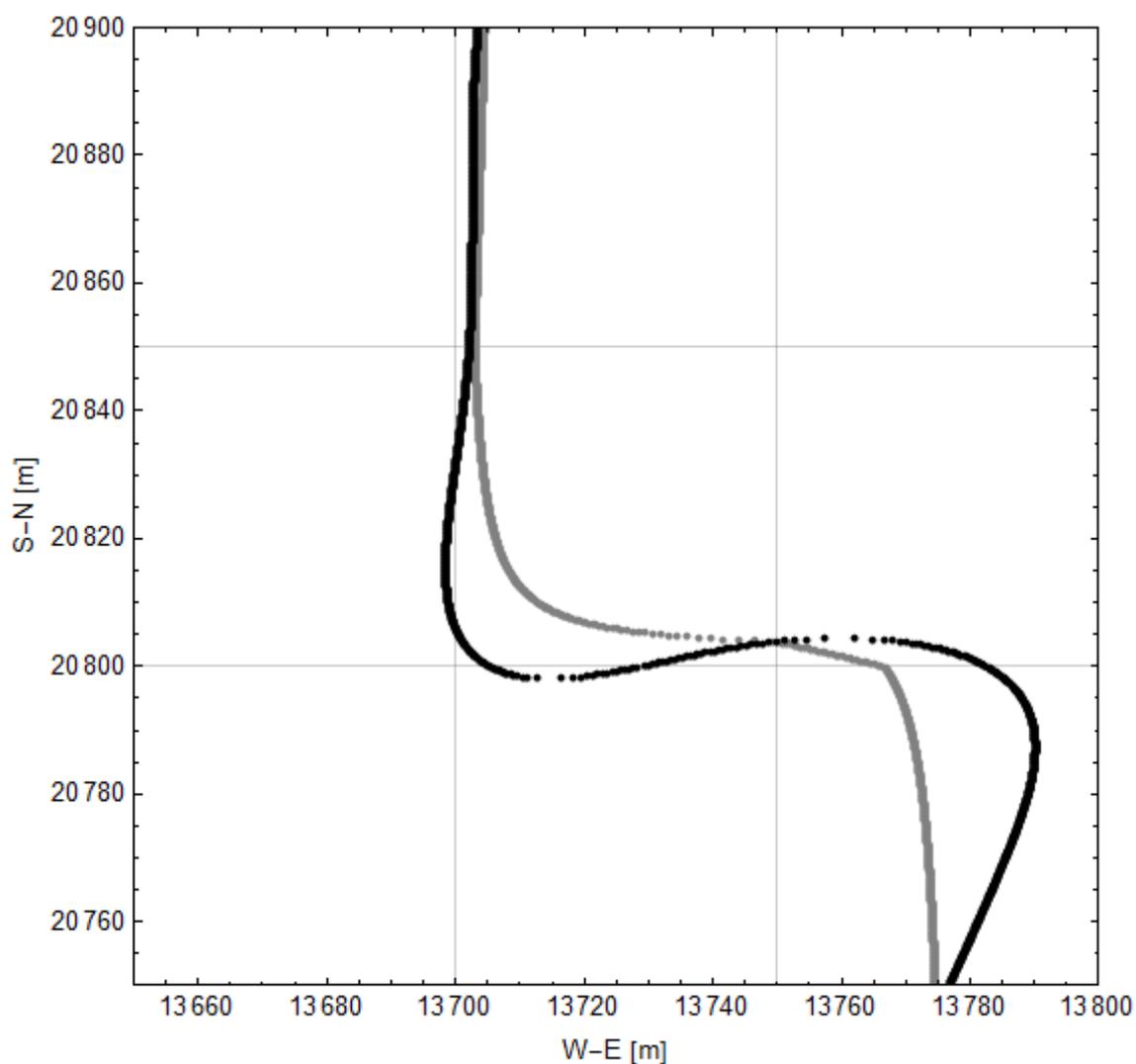


図 44: 双三次スプラインと双一次スプラインによる等高線の比較.

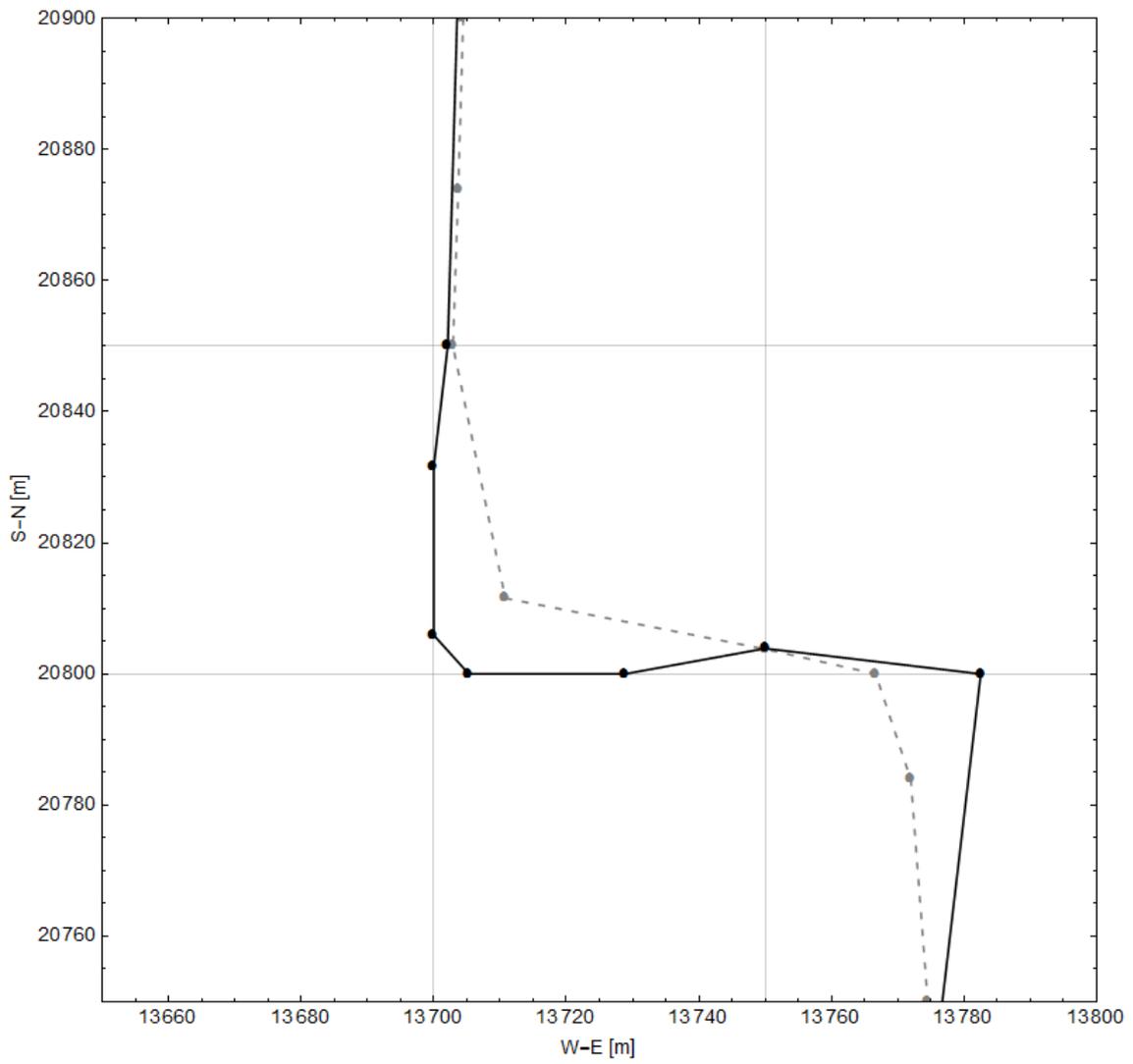


図 45: 二つの方法によるポリゴンの比較.

表 3 には、標高 0m と 500m, 1000m, 1500m それぞれの格子セルの数を格子セルの辺上の等高点数別に表示する。例えば、表 3 において 2 行 2 列目の 4863 という数字は、標高 500m の等高線と 4 辺が 2 点で交わる格子セルの個数を示す。さらに、図 46 と図 47, 図 48, 図 49 に表 3 の結果を円グラフで表す。各図において、等高点の個数が 2 点であるセルの割合は 9 割以上であり、その出口点は三次方程式のアルゴリズムを使わずに自動的に決まる。

表 3: 辺上の等高点数別のセル数.

セルの辺上の 等高点数	0m	500m	1000m	1500m
1	209	146	164	73
2	3020	4863	3883	1453
3	84	58	54	22
4	52	87	63	19
5	5	4	2	2
6	0	1	1	1
7	0	0	0	1
合計	3370	5159	4167	1571

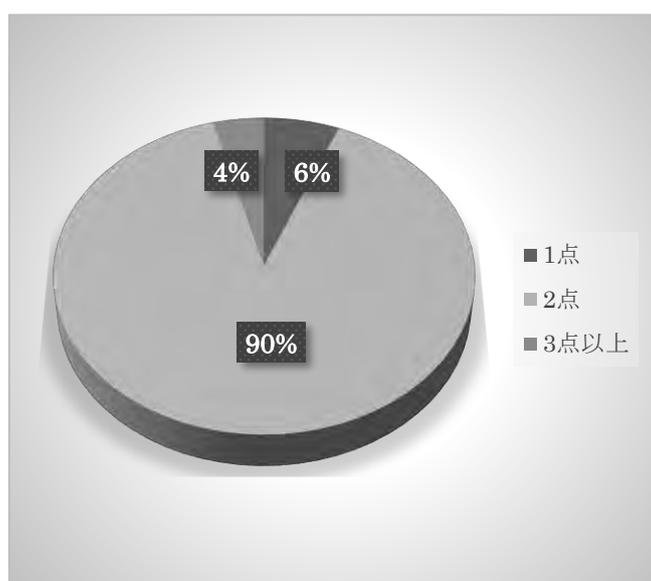


図 46: 標高 0m の等高点数別セル数の割合.

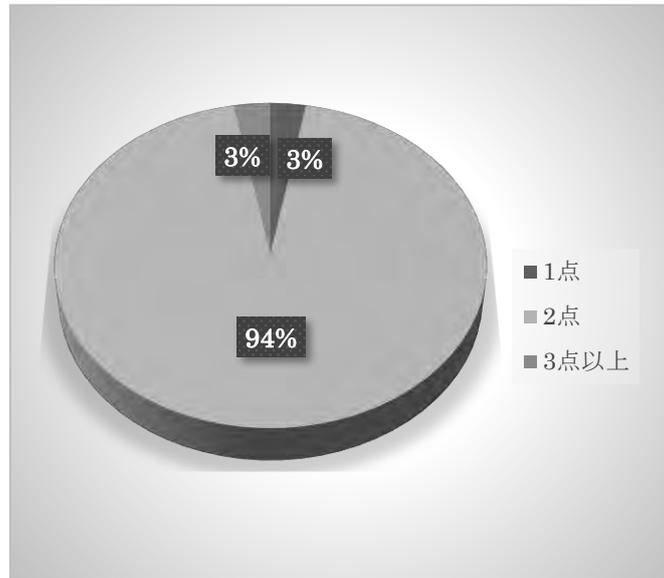


図 47: 標高 500m の等高点数別セル数の割合.

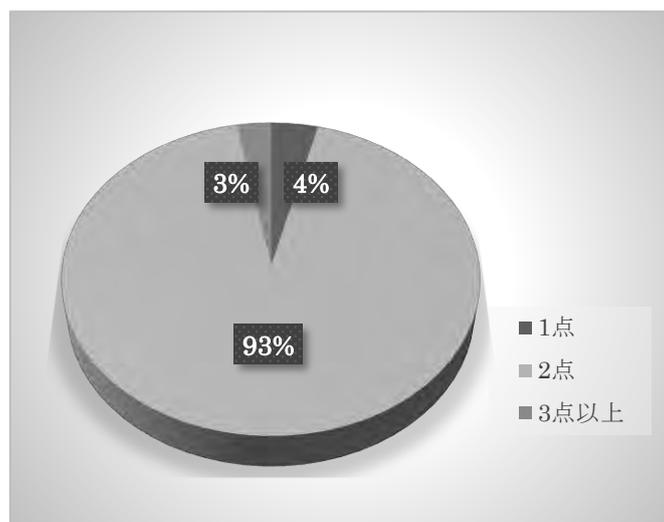


図 48: 標高 1000m の等高点数別セル数の割合.

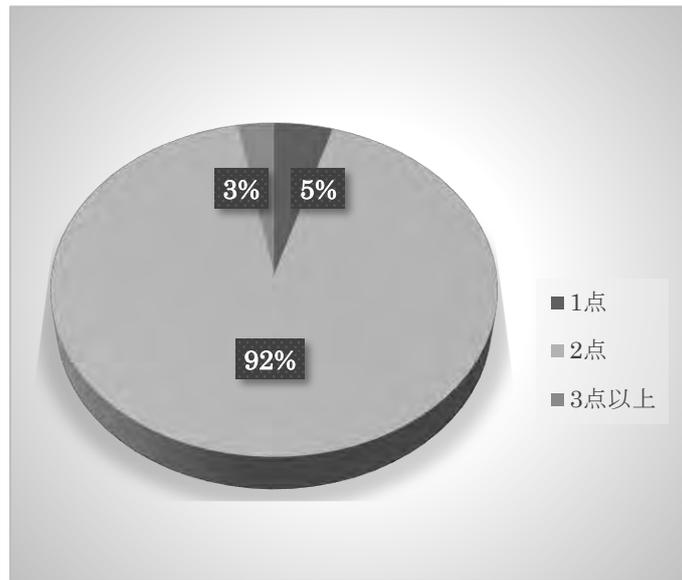


図 49: 標高 1500m の等高点数別セル数の割合.

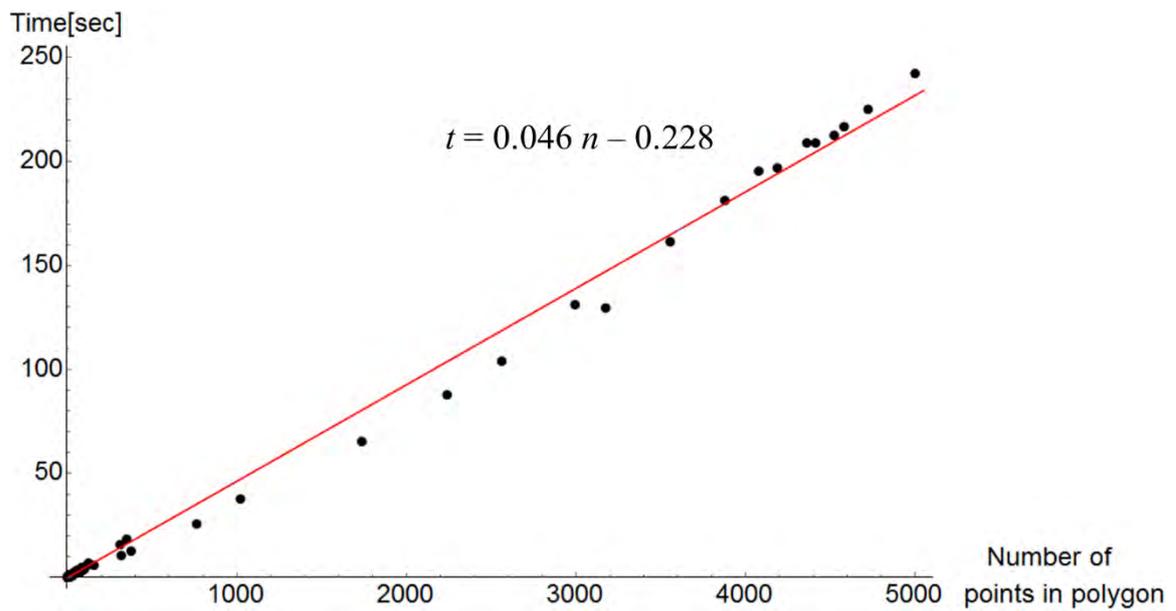


図 50: 等高線ポリゴンの生成時間.

図 50 は、縦軸にポリゴン作成にかかる計算時間 t [秒]、横軸にポリゴンの頂点数 n を表したものである。回帰式は、 $t = 0.046 n - 0.228$ となり、その寄与率は、 $R^2 = 0.996$ となった。ただし、サンプルデータは、100m 間隔、0m から 1900m 範囲で、すべてのポリゴンを採用している。図 50 より、1000 個の頂点をもつポリゴンの生成にかかる時間は、約 46 秒であることがわかる。

一つのポリゴンの生成において、セルの辺上の等高点の個数による計算時間の違いを比較するために、セルの辺上の等高点数が 2 点のセルの個数 n_1 、3 点以上であるセルの個数 n_2 とする。ただし、出口点の選択アルゴリズムの計算時間を調べるため、初期点は n_1 と n_2 から除く。説明変数を n_1 と n_2 、目的変数を一つのポリゴン生成時間 t とした重回帰式は、 $t = 0.046 n_1 + 0.108 n_2 - 10.68$ となり、その寄与率は、 $R^2 = 0.993$ となった。ただし、サンプルデータは、100m 間隔、0m から 1900m 範囲で、同一標高値をもつポリゴンのうち最大の頂点数をもつものを採用している。一つのポリゴン生成において、等高点数が 3 点以上であるセルの個数の割合は約 5% であり、上の偏回帰係数比より計算時間の割合は約 10% である。したがって、本アルゴリズムにおける等高点が 3 点以上の出口点の選択方法は複雑に見えるが、このケースにおいて計算時間に対する影響は限定される。

実験環境は以下のとおりである。

Machine: Aspire M3970,

CPU: Inter(R) Core(TM) i7-3770 3.40GHz,

OS: Microsoft Windows 7 Enterprise,

Memory: 8.00GB,

Program: Wolfram Mathematica 10.3.

第 6 章 おわりに

本研究は、双三次スプライン近似により標高関数を生成し、三次方程式の解の挙動を見ることで、対象とする標高の等高点を結び、等高線をポリゴンとして求めた。同一のサイズの格子に対し、双三次スプラインは双一次スプラインに比べて、複雑な地形の近似精度が上がる分、等高点を結ぶことが難しくなる。本アルゴリズムにより、この問題を解決した。さらに、本アルゴリズムは、格子セルの辺と等高線の交点を結んだポリゴンを網羅することができる。また、ステップごとの誤差が累積していく離散化による反復法と異なり、独立して等高点を求めるため誤差は累積しない。

今後の課題として、格子セル内の等高線を抽出するアルゴリズムが求められる。

参考文献

- [1] 山岡光治: 「地図はどのようにして作られるのか」, ベレ出版, 2013.
- [2] G. Cottafava & G. L. Moli: “Automatic contour map”, *Communication of the ACM*, vol.12(7), pp.386–391, 1969.
- [3] A. Lopes & K. Brodlie: “Accuracy in contour drawing”, *Eurographics UK Conference Proceedings*, pp.301–311, 1998.
- [4] C. Maple: “Geometric design and space planning using the marching squares and marching cube algorithms”, *IEEE Computer Society, International conference on geometric modelling and graphics*, pp.90–95, 2003.
- [5] M. J. McCullagh: “Creation of smooth contours over irregularly distributed data using local surface patches”, *Geographical Analysis*, vol.13(1), pp.51–63.
- [6] 吉田浩三: 「スプライン関数とその応用」, 教育出版, 1979.
- [7] 高木貞治: 「代数学講義」, 共立出版, 1930.
- [8] 森正武: 「数値解析」, 共立出版, 1973.
- [9] H. Goto & Y. Shimakawa: “Storage-efficient method for generating contours focusing on roundness”, *International Journal of Geographical Information Science*, vol.30(2), pp.200–220, 2015.