

需要の相関を考慮した多商品系新聞売り子問題の最適解

田島良太(09X4064) 指導教員 五島洋行 准教授

1. はじめに

本研究では、SPA 型小売業における商品の需要が相関を持つ場合の最適な陳列量の決定方法について考察する。SPA(Speciality Store Retailer of Private Label Apparel)型小売業は、自社で企画から製造販売までを行うことでサプライ・チェーンの無駄を省くことができるだけでなく、消費者ニーズに迅速に対応することができる小売業である。このような業種は、PB(Private Brand)商品を主体に販売することで、高い利益率を確保している。一般的に売り場の陳列量は、商品の印象や売り場の魅力に大きな影響を与えるため、顧客ニーズを反映した商品の開発、生産、供給を続け、店舗の売り場を PB 商品で満たすことが理想の陳列政策となる。しかし、アパレル業では流行の変化が早く、SPA 型企業が継続的に新商品を生産し続けることは困難であり、多くの SPA 型小売店では、商品を期待需要量のみ陳列している。その結果、売り場のスペースを埋めることができず、空きスペースができてしまう状況が発生している。

そこで店舗側は、売り場の魅力度を保つため、期待需要よりも多い商品数を陳列することで対策を行っている。しかし、SPA 型小売店が主として扱っている PB 商品は開発から製造まで自社で行うため、利益率は高いが、死蔵在庫のリスクが高くなってしまふ。そのため、高い利益率を保ちつつリスク低減を行うという観点から考えると、陳列政策は複雑であり、また重要でもある。よって、SPA 型小売業には、最適な陳列政策の策定が求められている。

2. 前提条件

本研究では、相関を持った需要を正規乱数として発生させ、菅沼[1]が求めた解析解に代入しシミュレーションを行うことで、最適解を求める。陳列スペースの総体積を $C(>0)$ 、商品数を $n(\geq 1)$ とする。また、ある商品 i ($1 \leq i \leq n$) に対し、関連する属性を表 1 のとおり定義する。 p_i, c_i, v_i, h_i, w_i は、非負定数、 $Q_i(\geq 0)$ は決定変数であり、 $p_i > c_i > v_i$ とす

表 1. 商品 i に関連する属性記号

項目	記号	項目	記号
売価	p_i	機会損失費	h_i
原価	c_i	占有体積	w_i
残余処理費	v_i	陳列量	Q_i

る。なお、本研究が想定する商品においては、極端に近い価格設定が各商品間で行われないものとする。さらに、確率変数である需要量 $x(\geq 0)$ に対し、確率密度関数を $f_i(x)(\geq 0)$ 、累積密度関数を $F_i(x)(0 \leq F_i(x) \leq 1)$ とする。 $F_i(x)$ は、 $dF_i/dx = f_i(x)$ 、 $F_i(0) = 0$ 、 $F_i(\infty) = 1$ を満たす。

2.1 目的関数

目的関数を与えるために期待利益 $\pi(Q)$ の最大化を図る最適化問題を構築するため、多商品系の新聞売り子問題と同様の、以下の数式モデルを用いる。

$$\begin{aligned} \pi(Q) = & \sum_{i=1}^n p_i \int_0^{\infty} \min(Q_i, x) f_i(x) dx - \\ & \sum_{i=0}^n c_i Q_i + \sum_{i=0}^n v_i \int_0^{Q_i} (Q_i - x) f_i(x) dx \\ & - \sum_{i=0}^n h_i \int_{Q_i}^{\infty} (x - Q_i) f_i(x) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 制約条件

制約条件は、陳列スペースの大きさと陳列量の調整にある。よって、陳列スペースの大きさに関して設定する。この場合考えられる状況は以下の二通りがあげられる。

- 空いている陳列スペースを埋めなくてはならない状況
- 陳列スペースが不足し、陳列商品の数を減らさなくてはならない状況

二つの状況における陳列政策は以下のような制約条件として定式化できる。

$$\sum_{i=1}^n w_i Q_i = C. \quad (2)$$

2.3 需要モデル

本研究では、正規乱数によってシミュレーションを行うが、正規分布の解析解を求める

ことが困難なため、正規分布と確立密度関数の形が類似している三角分布を利用し、2.2節の制約条件下での目的関数の最適解の解析解を利用する。また、三角分布の解析解は菅沼[1]によりすでに求められているため、これを利用する。

菅沼[1]による解析解では商品のグループ分けが行われており、以下の二式で最適陳列量が決定される。

$$Q_i^* = \beta_i - \sqrt{\frac{1 - (U_i - \lambda w_i)}{(E_i + U_i)}} \beta_i (\beta_i - \gamma_i). \quad (3)$$

$$Q_i^* = \frac{C - \sum_{k \in \mathcal{A}} w_k Q_k^*}{w_i} \quad (4)$$

この解析解ではリスク最小のため売り場の空きスペースを埋める商品の選択は占有体積当たりの原価の一番低い商品となっている。

3. シミュレーション結果

本研究の結果よりリスク低減、利益最大化の観点から陳列政策を行う場合、需要の相関を考慮した陳列政策を行う必要があることが分かった。図1は需要に相関がない場合であり、図2から正の相関が強い場合、商品2の陳列量が増加し、図3より負の相関がある場合、商品2の陳列量は減少することがわかる。特に、負の相関がある場合での商品1、2の陳列量の変化は大きく、相関を無視することはできない。相関を無視して陳列政策を行った場合、無駄な陳列を行うことになる。

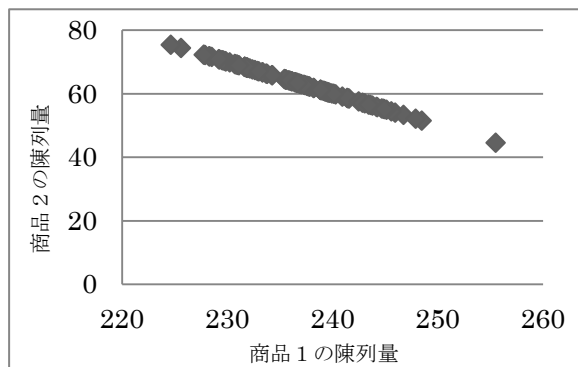


図1 相関係数0のときの商品1、2の陳列量

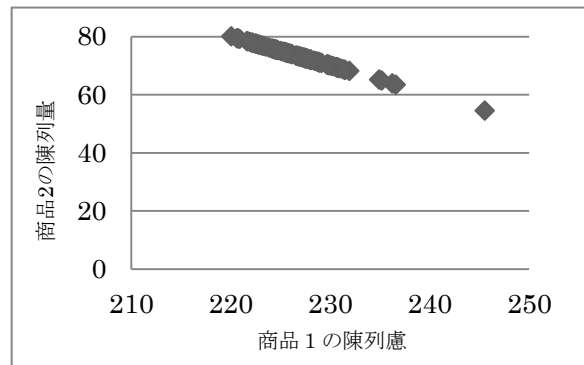


図2 相関係数0.9のときの商品1、2の陳列量

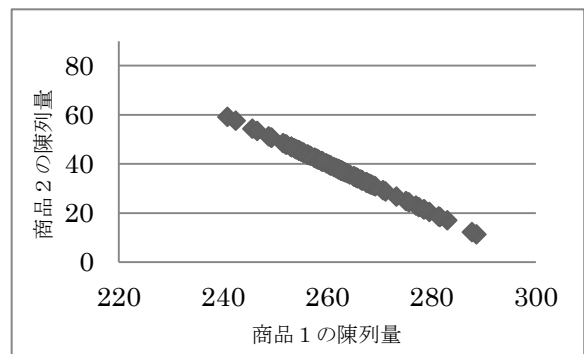


図3 相関係数-0.5のときの商品1、2の陳列量

4. おわりに

本研究では、菅沼[1]の三角分布の解析解を利用し、需要が相関を持つ場合の最適陳列量をシミュレーションにより求める考察を行った。その結果、より現実的でリスク低減、利益最大化の観点から陳列政策を行うためには相関を考慮した陳列政策が必要であることがわかった。

今後の課題として、相関を持った需要を考慮できる解析解を求めることが挙げられる。これにより、より実用的な研究結果を得られる。

参考文献

- [1] 菅沼拓也, “SPA 型小売業における商品の最適陳列量”, 長岡技術科学大学 工学研究科 修士論文 (2012)

需要の相関を考慮した多商品系 新聞売り子問題の最適解

指導教員

五島洋行 准教授

法政大学 理工学部 経営システム工学科
経営数理工学研究室
(平成 24 年度)

09x4064

田島良太

論文要旨

本論文では、SPA(Speciality store retailer of Private label Apparel)型小売業において、売り場の陳列スペースを制約条件とし、期待利益最大化の観点から商品の相関を考慮した場合の、最適陳列政策について提案する。SPA 型小売業とは自社で商品の開発、生産、販売までを行う業態である。近年、アパレル業界を中心にこの業態を行う企業が増えてきている。しかし近年の顧客ニーズは多様化しており、開発や生産の専門ではない SPA 型小売業者にとって、短期間かつ継続的な商品開発は難しい。そのため多くの SPA 型小売店では、商品を期待需要量のみ陳列しているが、売り場のスペースを埋めることができず、空きスペースができてしまう状況が発生している。そこで店舗側は商品を実需要以上に陳列し、店舗の売り場の魅力を保つという施策を行っている。しかし、この施策は売り場の魅力を保つことは出来るが、在庫になってしまうリスクを抱えている。特に SPA 型小売店の扱っている PB(Private Brand)商品は、利益率は高い反面、死蔵在庫になってしまう可能性も高い。よって SPA 型小売店にとって陳列政策は大変重要となり、リスク低減、利益最大化の観点から SPA 型企业における最適な陳列政策が必要である。

そこで本研究では、菅沼(2012)で求められている三角分布の解析解を利用し、相関関係を持った正規乱数を商品の需要として解析解に代入することでシミュレーションを行い、需要の相関関係を考慮した最適陳列政策について考察を行った。具体的には、正規乱数を商品の需要とし、商品間の需要に相関がない場合と相関がある場合の最適解を数値解として求める。

その結果、商品の需要に相関がない場合の解析解の最適解は、在庫リスク低減のために単位体積当たりの原価が一番安い商品で売り場の空きスペースを埋める陳列政策を行う結果を得た。次に商品の需要に相関がある場合、相関がない場合と同じ結果が得られたが、相関がない場合と比べ、商品間の相関が負の場合は在庫リスクの高い商品の陳列量が減少し、在庫リスクの低い商品が増加した。

この考察として、商品間の相関を考慮しなかった場合、在庫リスクの高い商品が無駄に陳列することになり、リスク低減の点から最適な陳列政策を行えていないと言える。つまり、最適な陳列政策を行うためには、商品の相関を考慮した陳列政策が必要であると言える。

検討の結果、商品間の需要に相関がある場合と、相関がない場合で最適陳列量に違いが表れ、より現実的な最適陳列量を決定するためには商品間の相関を考慮する必要があると分かった。

目次

第一章 序論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	1
1.3 論文構成	2
第2章 SPA 型小売業	4
2.1 SPA 型小売業とは	4
2.2 商品の特徴	5
2.3 陳列政策の課題	6
第3章 先行研究	8
3.1 フェース部分における研究	8
3.2 本研究の方向性	8
第4章 関連知識	10
4.1 新聞売り子問題	10
4.2 相関係数	10
第5章 問題の定式化	14
5.1 使用記号と前提条件	14
5.2 目的関数	14
5.3 制約条件	15
5.4 最適化問題の構築	16
5.5 需要モデル	18
第6章 数値解の導出	20
6.1 正規分布の近似	20
6.2 解析解の導出	20
6.3 シミュレーションによる数値解の導出	25
6.4 評価	27
6.5 考察	30
7章 結論	32
謝辞	33
参考文献	34

第一章 序論

1.1 研究背景

近年アパレル業界を中心に、SPA (Speciality store retailer of Private label Apparel) 型小売業が浸透している。SPA 型小売業とは商品の企画から開発、販売までを自社で行い、主に PB (Private Brand) 商品と呼ばれる自社製品を販売している業態である。によると従来アパレル業界では、百貨店を中心とする委託販売が中心であった。その商品は NB(National Brand)商品と呼ばれ、売れ残りが発生しても返品することが可能であるため、期待需要量よりも多く仕入れることができた。そのため、空きスペースを作らないための陳列政策を行えた。しかし、アパレル業界で最も重要である流行を掴むといった点では、販売と生産を別の業者が行っているため、顧客ニーズに答えることが難しい状況であった。また、商品を仕入れるまでに多くの中間業者が介入するため、仕入れに掛かるコストが高くなってしまっていた。こうした背景より、近年、SPA 型小売業の形態をとる企業が増えている[1]。SPA 型小売業では、商品の開発から生産、販売までを自社で行っているため、売り場と開発で情報共有を行うことができる。そのため、顧客ニーズや流行に素早く対応することが出来る。また、商品を仕入れるまでに中間業者が介入しないため仕入れコストを削減でき、一商品あたりの利益率をあげることができる。

小売業において在庫管理は重要課題であり、その中でも売り場の陳列量は商品の印象や売り場の魅力に大きな影響を与え、顧客の購買意欲につながると言える。そのため SPA 型小売業において、顧客ニーズを反映した商品を継続的に開発、生産、供給を行い、店舗の売り場を PB 商品で満たすことが理想の陳列政策となる。しかし、近年の顧客ニーズは多様化しており、商品の開発や生産を短期間かつ継続的な商品開発は難しい。その結果、多くの SPA 型小売店では、期待需要分の商品のみ陳列しており、空きスペースができてしまう状況が発生している。つまり、顧客の購買意欲を上げるための売り場作りが行えていない状況である。

そこで現在多くの店舗では、期待需要よりも多い商品数を陳列することで対策を行っている。その結果、売り場の魅力度や品揃え感を維持し、顧客の購買意欲を向上させている。しかし、商品を期待需要以上の仕入れを行ってしまうと、在庫を抱えてしまうリスクの増加につながってしまう。特に SPA 型小売店が扱っている PB 商品は、開発から製造まで自社で行っているため、利益率は高いが、在庫になってしまった時の損益も高い。そのため、高い利益率を保ちつつリスク低減を行うという観点から考えると、陳列政策は複雑であり、重要であるということがわかる。よって、SPA 型小売業には、最適な陳列政策の策定が求められている。

1.2 研究目的

商品の棚割問題は小売店の最重要課題であることから、この種の問題はオペレーシ

ョンズ・リサーチの分野において様々な研究が行われてきた。その多くの研究で、多商品系の新聞売り子問題が利用されている。新聞売り子問題とは、期首に仕入れた商品を期末には破棄しなければならない商品に対して期待利得を最大化するための最適陳列量を求める問題である。棚割問題を新聞売り子問題で定式化した研究の代表として、文献[2], [3]が挙げられる。文献[2]は、多商品系の新聞売り子問題に予算や陳列スペースの大きさに関する制約条件を与え、最適解を求めるアルゴリズムを提案している。また、文献[3]は、需要が正規分布に従う場合の近似解を、数値計算によって求める方法を提案している。以上より新聞売り子問題を棚割問題に適用した先行研究の多くは、いかに効率よく最適解を求めることができるかという、理論面に焦点を当てているため、実務への適用を目指す陳列政策の導出を目的としていない。さらに、制約条件が、不等式制約の場合についてのみの検討に留まっている。しかし、SPA 型小売業における棚割り当て問題に対応するためには、商品の占有体積を陳列スペースに一致させるという等式制約を与えなければならない。よって、これらの先行研究の成果は、SPA 型小売業には対応できない。

そこで、SPA 型小売業における棚割問題に対応し、かつ需要の不確実性を考慮した陳列政策の導出を行う研究が文献[1]で行われている。文献[1]では、多商品系新聞売り子問題を目的関数に採用し、最適化問題を構築している。そして、その最適化問題に陳列商品によって陳列スペースが満たされるという等式制約条件を与えている。そして商品の需要が一様分布、三角分布、分数関数を拡張した分布に従う場合について、最適化問題を解き最適陳列量を解析解として求めている。

しかし文献[1]では、各商品の需要が独立である場合についてのみ検討されており、商品間の相関について考慮していない。陳列する各商品の間に相関関係が成り立つことは珍しくなく、より現実的な最適陳列量を決定するうえで相関を無視することはできない。よって、本研究では SPA 型小売業を適用対象とした商品の最適陳列政策の導出が、本研究の目的である。

1.3 論文構成

本論文は全 7 章で構成されている。

第 2 章では、本論文で取り上げている、SPA 型小売業について説明する。SPA 型小売業の定義や取り扱う商品の特徴を述べた後、SPA 型小売業における課題について言及する。

第 3 章では、在庫管理問題に関する先行研究の説明をする。在庫管理問題に関する研究については、バックヤードに関する研究と、フェース部分に関する研究があるが、本研究に関係の強いフェース部分に関する先行研究のみを説明する。先行研究を説明した後、本研究との違いを示し、本研究の方向性を示す。

第 4 章では、本研究で必要となってくる関連知識について説明する。本研究では、相関係数と新聞売り子問題への知識が必須となっているためこの二つについて説明を行う。

第 5 章では、本研究のアプローチについて説明する。まず、前提条件や仮定を説明する。次に、利益最大化を図る目的関数と陳列スペースに関する制約条件を定義し、最適陳列量を求めるための最適化問題の構築を行い、本研究が採用する商品の需要モデルを紹介する。

第 6 章では、文献[1]によって求められている三角分布の解析解を利用し相関を持った正規乱数を発生させ、シミュレーションを行い、相関を持っている場合の最適陳列量を数値解で求める。その結果を評価し需要が相関を持っている場合と、相関を持っていない場合の違いを求め評価を行う。

第 7 章では、本論文のまとめを行う。

第2章 SPA 型小売業

2.1 SPA 型小売業とは

SPA とは、アメリカの衣料品小売り大手 GAP のドナルド・フィッシャー会長が自ら定義した「Speciality store retailer of private label apparel」の頭文字を組み合わせた造語であり、商品企画、開発、製造、販売、企画までを自社で手がける業態である。そのため、SPA 企業にはサプライ・チェーン全体のムダ、ロスを削減することができるという利点がある。従来日本のアパレル業界では、商品はメーカーで製造され、仲介業者を通し百貨店に届けられ委託販売されていた。しかし、GAP の成功を受けて SPA 業態が普及するようになった。日本では小売業が企画・製造に進出する場合のほか、衣料品メーカーが自らブランドを確立し小売に進出する場合も SPA と呼ばれている。その例として、ユニクロやアメリカの GAP、ワールド、スペインの ZARA（INDITEX Group）やスウェーデンのヘネス&モーリッツ（H&M）などがあげられ、アパレル業界の多くの企業が SPA に取り組んでいることが分かる。アパレル業界の商品は流行の変化が早いというためライフサイクルが短く、また商品も多様化している。SPA 型小売業では、商品の開発から生産、販売まで行っているため、売り場と開発で情報共有を行うことができ、顧客ニーズや流行に素早く対応することが出来る。アパレル業界で浸透した理由として、顧客ニーズに対応するためには、SPA 型小売業の業態が必要であると認識されたことが理由であると考えられる。

現在、アパレル業界で採用されている SPA 型小売業の基本構想は三つの工程に分けることができる。まず一つ目の「デマンドチェーン」は POS データなどの情報をもとにして、需要予測を行い、品揃えや発注の最適化を図り、市場のリードタイムを最短化が行える。次に「カテゴリー・プランニング」では IT ツールの利用により、情報共有が行われ、より効率的な生産が行われる。最後に「サプライ・チェーン」の段階では、調達から生産、販売までの工程のサプライ・チェーン全体の管理を行う。また、実際に商品を販売した後では、商品の不良在庫化を防ぐために POS データによる管理が行われ、機会損失の削減が図られている。[4] ここで SPA 型小売業の特徴を以下に示す。

(a) 顧客のニーズへの対応能力

商品開発から生産計画、販売までを自社で行えることから、自社顧客のニーズを適時的確に情報収集し、生産調整及び商品開発にフィードバックすることができる。よって流行の変化、天候要因に留まらず、メディアの反応による需要変化が起こる。しかし、消費者の声、POS 情報等を利用することにより、日々変化する需要を細かく掴むことができ、サプライチェーンネットワークを駆使することで、短期間での追加発注及び生産調整を行える仕組みが SPA 型企業の最大のポイントである。

(b) コスト削減で利益率が高い

生産から開発までを自社で行うことから、サプライ・チェーンのロスを削減することができる。そのため、商品開発を低コストで行うことができ、商品が売れたときに高い利益率を得ることができる。また、消費者の立場から考えると良い商品を低価格で購入することができると言い換えられる。

(c) 独自ブランドの差別化を図れる

商品企画から生産までを自社で行うことから他店にはない独自の商品を開発できる。つまり、独自のブランドを確立することができ、他社の製品との差別化を図ることができる。

(d) 在庫リスクが大きい

(b)で利益率を高く設定できることを説明したが、一方で売れ残りリスクをすべて自社で引き受けなければいけないというデメリットもある。トレンド情報、顧客情報収集から商品開発に至るプロセスを全て自社で行うため、商品を開発するまでにコストがかってしまう。つまり、在庫負担は自社の経営に直接影響を与える事になる。さらに、初回発注、追加発注、生産収束等に関わる高度な情報収集分析能力及びインフラ整備が求められる。そのため、商品が不良在庫となった場合の損失が大きくなってしまう。

(e) 商品のライフサイクルが短い

アパレル業界では、顧客は流行に合わせた新しい商品を求める。そのため、企業は流行を掴むことが重要である。そのため企業側は、継続的に新しい商品を生産する必要がある。(a)で顧客ニーズへの適応能力を説明したが、(a)を実現するためには短期間での商品開発が求められる。よって、顧客ニーズに答えるためには継続的な開発費が必要となる。

2.2 商品の特徴

一般的に、SPA 型小売業では PB(Private Brand)商品と NB(National Brand)商品の 2 種類を販売している。まず PB 商品とは小売業者や卸売業者などの流通業者が独自に製品を生産し、所有・管理するブランドのことである。単価が安く、NB 商品に劣らない機能を持つ製品が多い。この PB 商品は私たちの生活の中に数多く存在し、食品、日用品、家電製品、衣類と様々な分野で見受けられる。流通業者がメーカーからの制約を受けない PB 商品を作るメリットとしては、無駄なコストを削減でき低価格での販売が可能のため、安く製品を提供することができるといった点や、独自の製品を作り差別化を図れるといった点がある。次に、NB 商品とは、大手メーカーが全国規模で展開

するブランドの商品ことである。商品のブランド名が一般的に周知されているので、販売側にとって価格は PB 商品に比べて高くなるが、購入者に対してブランド価値や商品の安心感などの付加価値を与えることができる。しかし、NB 商品は全国規模で買えるために売値を上げにくく、一定的に売れはするものの利益は小さくなってしまう。そこで、SPA 型小売業においては、高い利益率を上げるために PB 商品をメインに扱うことが多くなる。しかし、PB 商品は自社開発の商品であるため死蔵在庫になってしまったときの損益も大きいことに加え、商品の知名度も NB 商品に比べると低い。よって PB 商品はハイリスク、ハイリターンの商品と言える。

一方で、NB 商品は開発コストがかからず、商品知名度も高いので売れ残りのリスクも少ないが期待利益が低くなるという PB 商品とは正反対の特性をもつ。よって、SPA 型小売業において利益をあげるためには、PB 商品と NB 商品の特性や、流行などに合わせて商品の陳列政策を検討する必要がある。PB 商品と NB 商品の特性を表 1 に示す。

表 1 PB 商品と NB 商品の特性

	期待利益	売れ残りリスク	商品の種類
PB 商品	ハイリターン	ハイリスク	新商品
NB 商品	ローリターン	ローリスク	既存商品

2.3 陳列政策の課題

SPA 型小売店における商品陳列は、売り場の魅力に繋がり、その店舗のブランドが流行に合った商品であるかを判断する要因となる。つまり、店舗の陳列政策は顧客の購買意欲に大きな影響を与え、小売店における陳列政策は重要となる。特にアパレル業界では、トレンドや顧客ニーズの移り変わりが早く、商品のライフサイクルが短くなっている。2.1 節でも説明したが、SPA 型小売業には顧客ニーズへの対応を早く行えるという特徴があるため、商品の短いライフサイクルにも対応することが出来る。しかし、近年の顧客ニーズは多様化しており継続的に新商品を開発することが難しくなっている。そのため、小売店で扱える商品に限りがあり、SPA 型小売業では、取り扱う商品の期待需要分のみの陳列となり、陳列スペースを埋めることができず、空きスペースが発生している。そこで、店舗側は商品を実需要以上に陳列し、店舗の売り場の魅力を保つという対策をとっている。しかし、この施策は売り場の魅力を保つことは出来るが、在庫になってしまうリスクも抱えている。特に SPA 型小売店の扱っている PB 商品は、利益率は高いが死蔵在庫になってしまう可能性が高い。

よって SPA 型小売店にとって陳列政策は重要となる.

以上より、顧客に購買意欲を持たせるための魅力がある売り場作りを行いながら、PB 商品が死蔵在庫になってしまうリスクの低減を行うための陳列が必要である.

第3章 先行研究

3.1 フェース部分における研究

本研究に関連するフェース部分の在庫を対象とした先行研究を紹介する。フェース部分に関する研究は多く行われているが、新聞売り子問題を拡張した研究、独自モデルを構築した研究を紹介する。文献[2], [3], [5], [6]は文献[1]の先行研究である。

- 新聞売り子問題を拡張した研究

オペレーションズ リサーチの分野では、新聞売り子問題を拡張した研究が多く行われている。次節で詳しく説明するが、新聞売り子問題とは、期首に仕入れ期末には破棄しなければならない商品に対して期待利得を最大化するための最適陳列量を求める問題である。本研究でも、この新聞売り子問題を拡張した数理モデルを目的関数に採用している。

先行研究である文献[1]では陳列スペースに関する制約条件の下で、多商品系の新聞売り子問題を目的関数として解析解を求める方法を提案している。文献[1]では、一様分布、三角分布、分数関数についての解析解が求められており様々な需要に対して解を求めることを可能としている。また、新聞売り子問題の研究の代表的なものとして、多少品系の新聞売り子問題に予算や陳列スペースの大きさなどの制約条件を課し最適陳列量を求める、文献[1]の先行研究である文献[2], [3]が挙げられる。文献[2]では、制約下における解を求める二つのアルゴリズムを提案している。また、文献[3]では、需要が正規分布に従う場合の近似解を、数値計算によって求める方法を提案している。

- 商品のリスクを考慮した在庫政策

フェース在庫に焦点をあてた陳列政策については、従来から「Shelf Allocation Problem」や「Assortment Problem」などとして取り扱われ、数多くの研究が行われている[5], [6]。これらの研究では、輸送費用や在庫保管費用などの様々な間接コスト、陳列の魅力度などの測定あるいは数値化した指標、需要予測精度の向上や在庫コントロール機能について扱っている。このような、制約や課題を考慮し、売り上げあるいは利益を最大化する最適化問題を構築し、その解を効率よく求める方法について検討している。

3.2 本研究の方向性

商品のリスクを考慮した研究の多くは、陳列可能な商品の候補が複数ある中で、それらをどのように組み合わせるか、という状況を想定している。これは、陳列スケー

スが不足している状況での検討となっている。しかし、本研究では陳列スペースに空きができてしまう状況での検討が中心であり、想定している状況が異なり、商品のリスクを考慮した研究に分類される研究は SPA 型小売業に適用できない。

本研究では、多商品系の新聞売り子問題のモデルを目的関数として採用する。しかし、本研究と 3.1 節で紹介した新聞売り子問題を拡張した先行研究とは、研究の方針が異なる。多くの先行研究では、粗利益などの目的関数に対し、不等式制約条件を与えている。従って、制約条件が不等式で表現されている。しかし、本研究では空きスペースを許容せず、陳列スペースを埋める商品を陳列するという制約条件で粗利益の最大化を図る陳列政策を検討する。よって、陳列スペースの大きさに関して、等式制約を与える必要がある。文献[1]では、空きスペースを許容しないという等式条件下で、最適陳列量を三種類の需要モデルにおける解析解として与えている。このことにより需要の不確実性を考慮した、より現実的な解析解の導出を行っている。

しかし、本研究で考慮する相関係数については考慮されていない。相関係数とは商品間の関係の強さを表す指標である。例えば、身長と体重のように身長が伸びれば体重も増えるという関係性である。つまり、ある商品の需要がもう一方の商品の需要に変化を与えるという状況である。このような状況は現実的に起こっている。

そこで、文献[1]の研究で求められている解析解を利用し、相関を持った正規乱数を商品の需要と見立てシミュレーションを行い、商品間の需要に相関関係がある場合の最適陳列量を求め、商品の相関を考慮した最適陳列政策を考察する。

第4章 関連知識

4.1 新聞売り子問題

新聞などの期首に仕入れた商品を期末には破棄しなければならない商品に対して期待利得を最大化するための最適陳列量を求めるために、新聞売り子問題が適用される。仕入れの新聞の部数を多くしてしまうと売れ残りのリスクが発生し損失を生んでしまう。しかし一方で、仕入れの新聞の部数が少なすぎると新聞を販売する機会を失ってしまい機会損失 v を生んでしまう。この状況下で最適な仕入れ数を求めるために新聞売り子問題が利用される。

ここで、新聞売り子問題の定式化を行う。商品の原価を c 、売値を p 、残余処理費を v とし、 $p > c > v \geq 0$ が成り立つとする。次に、商品の需要をある確率分布に従って変動するものとし、確率変数である需要量 $x(\geq 0)$ に対し、確率密度関数を $f(x)(\geq 0)$ 、累積密度関数を $F(x)(0 \leq F(x) \leq 1)$ とする。 $F(x)$ は、 $dF/dx = f(x)$, $F(0) = 0$, $F(\infty) = 1$ を満たす。また、仕入れ数を Q 、販売需要を x とする。このとき、期待利得 $\pi(Q)$ は、式(1)で与えられる。[7]

$$\begin{aligned}\pi(Q) = & p \int_0^{\infty} \min(Q, x) f(x) dx - cQ \\ & + v \int_0^Q (Q - x) f(x) dx \\ & - h \int_{Q_i}^{\infty} (x - Q_i) f(x) dx\end{aligned}\tag{1}$$

$$Q^* = F^{-1}(x) \left(\frac{U}{E + U} \right)\tag{2}$$

また、式(1)の無制約条件下での陳列量 Q の最適解は式(2)となる。ただし、 $E = c - v$, $U = p + h - c$ であり、 $F^{-1}(x)(0 \leq x \leq 1)$ は $F(x)$ の逆関数を、記号‘*’は最適性を表している。

4.2 相関係数

X, Y が二次元正規分布に従うとき、 X と Y の関係は、相関係数 $\rho(-1 \leq \rho \leq 1)$ で表される。 (X, Y) の n 組の実現値 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$)が得られているとき、相関係数 ρ は以下の式(3)で求まる。

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3)$$

相関係数とは2つの変数の関係の強さを示す指標である。例えば身長と体重の関係があげられる。一般的に、身長が高くなれば体重は重くなり、身長が低ければ体重は身長が高い人に比べ軽いことがわかる。このとき、身長と体重には相関関係があるといえる。しかし、相関関係とは一方のデータが原因であり一方のデータが結果になっており、因果関係を示すものではない。先ほどの例で、身長が高くなれば体重は増える述べたが、体重が増えれば身長が伸びるわけではないことに注意してなくてはならない。これは、身長が伸びることが原因であり、体重の増加が結果の関係になっているからである。相関には以下の三つのパターンがあげられる。

1. Xが増加すれば、Yも増加する
2. Xが増加しても、Yは無関係な値をとる
3. Xが増加すると、Yは減少する

1 のとき、 $0 < \rho \leq 1$ となり、 X と Y の間には正の相関があるという。図1は相関係数 $\rho = 1$ の散布図である。図1からわかるように強い正の相関がある場合、右上がりの直線の周りにデータの点が集中する。次に2のとき、 $\rho \cong 0$ となり、 X と Y の間に相関がないという。図2は相関係数 $\rho = 0$ の散布図である。図2からわかるように、相関がないときの散布図は、ばらけた形となる。これは X と Y の間に関係性がないため X の値が決まっても Y の値が自由な値をとるためである。最後に3のとき、 $-1 \leq \rho < 0$ となり、 X と Y の間には負の相関があるという。図3は相関係数 $\rho = -1$ の散布図である。図3からわかるように強い負の相関がある場合、右下がりの直線の周りにデータの点が集中する。[8]

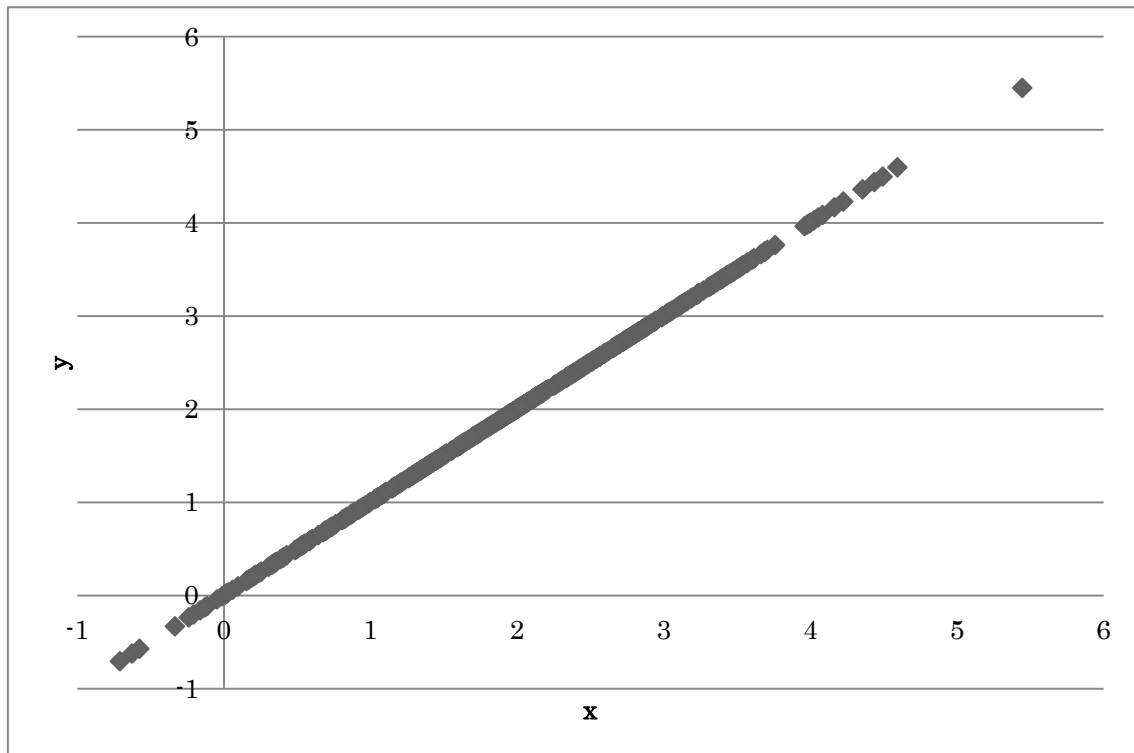


図 1 相関係数 $\rho=1$ のときの x, y の散布図(データ数 500)

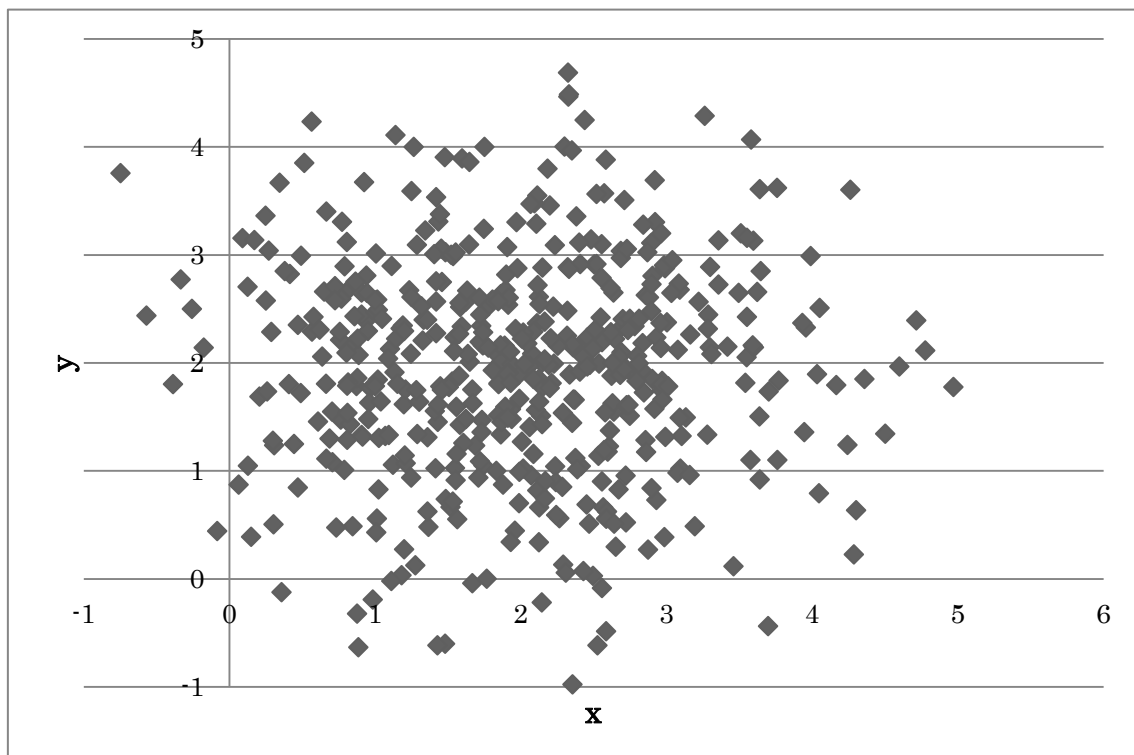


図 2 相関係数 $\rho=0$ のときの x, y の散布図(データ数 500)

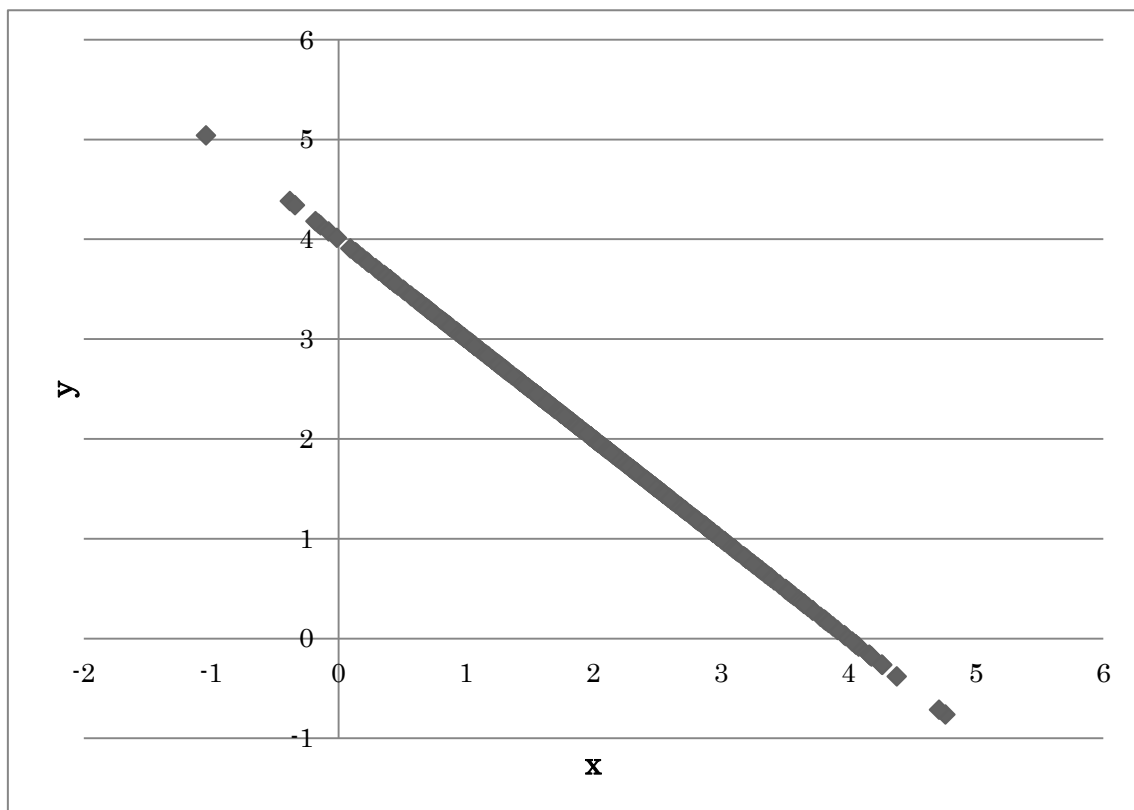


図 3 相関係数 $\rho=-1$ のときの x, y の散布図(データ数 500)

第5章 問題の定式化

はじめに使用する記号や仮定を定義したのち、目的関数や制約条件を与える。次に、与えられた目的関数と制約条件を組み合わせ、陳列スペースに関する制約条件付きの最適化問題を構築する。最後に、本研究で用いる需要モデルを定義する。本研究では文献[1]の解析解を使用するため、問題の定式化についても同様のモデルを使用する。よって、以下は文献[1]の引用となる。

5.1 使用記号と前提条件

本論文では、陳列スペースの総体積を $C(>0)$ 、商品数を $n(\geq 1)$ とする。また、ある商品 $i(1 \leq i \leq n)$ に対し、関連する属性を表2のとおり定義する。 p_i, c_i, v_i, h_i, w_i は、非負定数、 $Q_i(\geq 0)$ は決定変数であり、 $p_i > c_i > v_i$ とする。なお、本研究が想定する商品においては、極端に近い価格設定が各商品間で行われないものとする。さらに、確率変数である需要量 $x(\geq 0)$ に対し、確率密度関数を $f_i(x)(\geq 0)$ 、累積密度関数を $F_i(x)(0 \leq F_i(x) \leq 1)$ とする。 $F_i(x)$ は、 $dF_i/dx = f_i(x)$ 、 $F_i(0) = 0$ 、 $F_i(\infty) = 1$ を満たす。

表 2. 商品 i に関連する属性記号

項目	記号	項目	記号
売価	p_i	機会損失費	h_i
原価	c_i	占有体積	w_i
残余処理費	V_i	陳列量	Q_i
過剰コスト	$E_i = C_i - V_i$	欠品コスト	$U_i = p_i + h_i - c_i$

5.2 目的関数

本研究では、目的関数を与えるために期待利益 $\pi(Q)$ の最大化を図る最適化問題を構築するため、多商品系の新聞売り子問題と同様の以下の数式モデルを用いる。

$$\begin{aligned}
\pi(Q) = & \sum_{i=1}^n p_i \int_0^{\infty} \min(Q_i, x) f_i(x) dx - \sum_{i=0}^n c_i Q_i \\
& + \sum_{i=0}^n v_i \int_0^{Q_i} (Q_i - x) f_i(x) dx \\
& - \sum_{i=0}^n h_i \int_{Q_i}^{\infty} (x - Q_i) f_i(x) dx.
\end{aligned} \tag{4}$$

式(4)の右辺は、第一項から売上高、原価、残余処理費、機会損失を表している。 $\pi(Q)$ の第一次導関数、および第二次導関数は以下のとおりである。

$$\frac{\partial \pi(Q)}{\partial Q_i} = U_i - (E_i + U_i) F_i(Q_i) \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Q_i^2} = -(E_i + U_i) f_i(Q_i). \tag{6}$$

ただし、 $E_i = c_i - v_i$, $U_i = p_i + h_i - c_i$ とする。 E_i , U_i はそれぞれ過剰コスト、欠品コストと呼ばれ、実質的な原価、粗利益とみなすことができる。

$p_i > c_i > v_i > 0$ という条件より、 $E_i > 0$, $U_i > 0$, $\partial^2 \pi(Q) / \partial Q_i^2 \leq 0$ となるため、 $\pi(Q)$ は凸関数であることが分かる。 よって、最適解は $\partial \pi(Q) / \partial Q_i = 0$ を満たす Q_i を求めればよく、

$$Q_i^* = F_i^{-1}\left(\frac{U_i}{E_i + U_i}\right) \tag{7}$$

となる。ただし、 $F_i^{-1}(x) (0 \leq x \leq 1)$ は $F_i(x)$ の逆関数を、記号‘*’は最適性を表している。式(7)は無制約条件下での最適解である。

5.3 制約条件

次に制約条件を与える。店舗側は、陳列スペースの大きさに応じて、陳列量を調整しなくてはならない。よって、制約条件は陳列スペースに関して設定する必要がある。その状況としてあげられるのが次の二つである。

- 陳列する商品の占有体積が陳列スペースより小さい状況
- 陳列スペースが陳列する商品の占有体積よりも小さい状況

まず、前者の解決方法としては陳列スペースを埋めることが必要になる。この状況は、特に SPA 型小売業で頻繁に起こる。現状では商品が各需要分だけ陳列されているが、それだけでは商品の占有する体積が陳列スペースを埋めることができていない。このとき、陳列スペースを他商品ではなく、既存の商品のみで売り場の空きスペースを充填しなくてはならないとする。その解決策として、それぞれの商品を需要量分よりも多く陳列し、スペースを埋める必要がある。

次に後者は、各商品の需要量分の商品を陳列してしまうと、陳列スペースよりも占有体積が大きくなってしまうので、陳列する商品数を需要量よりも減らさなくてはならない。

以上の二つの状況における陳列政策は、以下のような制約条件として、定式化することが可能である。

$$\sum_{i=1}^n w_i Q_i = C. \quad (8)$$

5.4 最適化問題の構築

前節までで定式化した目的関数と制約条件とを組み合わせることで、期待利益を最大化する。等式制約条件付きの最適化問題を以下の通り構築する。

$$\pi(Q) \rightarrow \max, \text{subject to 式(8) and } Q_i \geq 0 \text{ for all } i \ (1 \leq i \leq n), \quad (9)$$

ただし、 $\pi(Q)$ は式(4)で定義したものをを用いる。

この類の条件付き最適化問題を解く方法として、ラグランジュの未定乗数法がある。未定乗数 η_i, λ を制約条件 式(8)と条件 $Q_i \geq 0$ に適用し、ラグランジュ関数 L を以下のとおり定義する。

$$L = \pi(Q) + \lambda \left(C - \sum_{i=1}^n w_i Q_i \right) + \sum_{i=1}^n \eta_i Q_i. \quad (10)$$

また、式(5)と式(6)より、以下が成り立つ。

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = U_i - (E_i + U_i)F_i(Q_i) - \lambda w_i + \eta_i. \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial Q_i^2} = -(E_i + U_i)f_i(Q_i) \leq 0. \quad (12)$$

ここで、以下のKKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を用いることにより、最適解を求めることができる。

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0, Q_i \geq 0, \eta_i \geq 0, \text{ and } \eta_i Q_i = 0 \text{ for all } i (1 \leq i \leq n). \quad (13)$$

式(13)の $\eta_i Q_i = 0$ は相補条件と呼ばれ、この条件により、以下の二つの場合分けができる。

(i) $\eta_i \geq 0$ ならば $Q_i = 0$ であり、

$\eta_i = -U_i + (E_i + U_i)F_i(0) + \lambda w_i = -U_i + \lambda w_i > 0$ が成り立つ。よって、未定乗数 λ に関して $\lambda > U_i/w_i$ を得られる。

(ii) $\eta_i = 0$ ならば $Q_i \geq 0$ であり、 $-U_i + (E_i + U_i)F_i(Q_i) + \lambda w_i = 0$ が成り立つ。よって、最適解は $Q_i^* = F^{-1}[(U_i - \lambda w_i)/(E_i + U_i)]$ で与えられる。

(ii)の場合において、 $\lambda = U_i/w_i$ とすると、 $Q_i^* = F_i^{-1}(0) = 0$ となる。また、 λ の値を小さくすると、逆に最適解 Q_i の値は大きくなることが分かる。よって、未定乗数 λ は、商品の陳列量を調整するパラメータといえる。ここで、 λ を独立変数とする関数

$$G_i(\lambda) = F_i^{-1}\left(\frac{U_i - \lambda w_i}{E_i + U_i}\right) \quad (14)$$

を導入する。よって、 $\eta_i = 0$ における最適解は $Q_i^* = G_i(\lambda)$ となる。さらには、無制約条件下での最適解である式(7)は、 $Q_i^* = G_i(0)$ で表現される。

以上より、全商品を陳列することができる状況下では、制約条件 式(8)を以下のとおり書き換えることができる。

$$\sum_{i=1}^n w_i F_i^{-1}\left(\frac{U_i - \lambda w_i}{E_i + U_i}\right) = \sum_{i=1}^n w_i G_i(\lambda) = C \quad (15)$$

ここで、以下の指標を定義する.

$$\delta C = C - \sum_{i=1}^n w_i G_i(0) \quad (16)$$

この指標は、陳列スペースの大きさと、式(7)で与えられる無制約条件下での最適陳列量による商品の占有体積の差を表している。つまり、無制約条件下で陳列を行ったときの、空きスペースや不足スペースの大きさを表す。もし、 $\delta C = 0$ ならば、 $\lambda=0$ で制約条件式(15)が成り立つため、最適陳列量は $Q_i^* = G_i(0)$ となる。また、 $\delta C > 0$ の場合は、陳列スペースには空きが発生しているため、 $\lambda=0$ から λ を小さくしていくことで、陳列量を増やす調整を行う。対して、 $\delta C < 0$ の場合は、陳列スペースが不十分な状況が発生しているため、 $\lambda=0$ から λ を大きくしていくことで、陳列量を減らすことができる。

さらには、 $\lambda > U_i/w_i$ を満たす商品の最適解は、(i)の条件より $Q_i^* = 0$ となる。これは、当該商品が陳列されないことを表す。そのため、単位体積当たりの粗利益が、ある λ より低い商品は陳列対象から除外される。よって、もし陳列スペースに限りがある場合、単位体積当たりの粗利益が低い商品の陳列優先度は低くなることが予想される。

5.5 需要モデル

本研究では、相関を持った正規乱数でのシミュレーションを行うため、正規分布を需要モデルに採用すべきであるが、正規分布は関数の形が複雑であるため、最適陳列量を解析解として求めることが困難である。よって、正規分布と確率密度関数の形が近い、需要が単峰型の確率分布である、三角分布を採用し、需要が三角分布に従う場合の最適陳列量を解析解として求める。本研究では最大値 β_i 、最頻値 γ_i を持つ以下の三角分布を需要モデルとして採用する。

$$f_i(x) = \begin{cases} 2x/\beta_i\gamma_i & 0 \leq x < \gamma_i. \\ 2x(\beta_i - x)/\beta_i(\beta_i - \gamma_i) & \gamma_i \leq x < \beta_i. \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (17)$$

一般的に、三角分布は、左裾部分を $x = a_i$ として扱うが、本研究では簡単化のために $a_i = 0$ とした。よって、需要の期待値 μ_i は $\mu_i = \gamma_i + \beta_i/3$ で求められる。また、菅沼[1]の研究より引用すると、式(17)の累積密度関数は、

$$f_i(x) = \begin{cases} x^2/\beta_i\gamma_i & 0 \leq x < \gamma_i. \\ 1 - (\beta_i - x)^2/\beta_i(\beta_i - \gamma_i) & \gamma_i \leq x < \beta_i. \\ 1 & x \geq \beta_i \end{cases} \quad (18)$$

で与えられる. さらに, 未定乗数 λ を用いて, 最適解を表す式(14)の関数 $G_i(\lambda)$ は,

- もし, $0 \leq Q_i < \gamma_i$ ならば,

$$G_i(\lambda) = \sqrt{\frac{\beta_i\gamma_i(U_i - \lambda w_i)}{E_i + U_i}}. \quad (19)$$

- もし, $\gamma_i \leq Q_i < \beta_i$ ならば,

$$G_i(\lambda) = \beta_i - \sqrt{\frac{1 - (U_i - \lambda w_i)}{E_i + U_i} \beta_i(\beta_i - \gamma_i)}, \quad (20)$$

となる. 三角分布は, 範囲に応じて与えられる確率密度関数が異なり, 場合分けが必要になる.

第6章 数値解の導出

本章では、第5章で定義した目的関数に対して、5.5節で定義した三角分布の需要モデルを適用し、最適陳列量を解析解として導出する。そして、求められた解析解と相関を持った正規乱数を利用してシミュレーションを行い、数値解を求める。このとき、相関を持った正規乱数は実世界における、相関を持った商品の需要とする。そのシミュレーション結果を需要に検討することで、需要が相関を持つ場合と相関を持たない場合での最適陳列量の決定方法の違いを述べる。

6.1 正規分布の近似

5.5節でも説明をしたとおり、正規分布で多商品系新聞売り子の解析解を求めることが困難なため、本論文では正規分布の確率密度関数の形に近い三角分布を採用し、三角分布の解析解を求める。そのために、正規分布を三角分布で近似させる必要がある。よって、本節では正規分布の近似を行う。

三角分布の左裾部分を0とし、最頻値を a 、右裾部分の最大値を b とする。ただし、 $2a = b$ が成り立つ。このとき三角分布の平均 μ 、分散 σ^2 は以下の式で求まる。

$$\mu = \int_0^b xf(x)dx. \quad (21)$$

これを、最頻値 a の前後で $f(x)$ が変化することに注意し、書き換えると

$$\mu = \frac{1}{a^2} \int_0^a x^2 dx + \frac{1}{a^2} \int_a^b (-x^2 + 2ax) dx. \quad (22)$$

式(22)より $a = \mu$ が求まる。

$$\sigma^2 = \int_0^b (x - \mu)^2 f(x) dx. \quad (23)$$

同様に(23)を解くと $a = \sqrt{6}\sigma$ を得られる。

つまり、正規乱数を発生させシミュレーションを行う際に、平均の値はそのまま利用し、分散の値は $\sqrt{6}$ 倍させることで正規分布を三角分布に近似できることがわかる。

6.2 解析解の導出

需要が三角分布に従う場合の、第5章で定義した制約付き最適化問題の解法について検討する。この検討については菅沼の研究[1]により、すでに行われているので利用

する. よって, 以下は菅沼[1]の引用となる.

三角分布は $x = \beta_i$ と $x = \gamma_i$ において確率密度関数の形が異なるため, 商品は当該商品の陳列量の範囲により, 以下の二グループに大別することができる.

- グループ $\mathcal{A}$: 陳列量 Q_i が, 当該商品の需要の最大値 β_i 以下となる商品の集合, つまり商品 $i \in \mathcal{A}$ に対しては, $f_i(Q_i) \neq 0$ が成り立つ.
- グループ $\mathcal{B}$: 陳列量 Q_i が, 当該商品の需要の最大値 β_i より大きくなる商品の集合, つまり, 商品 $i \in \mathcal{B}$ に対しては $f_i(Q_i) = 0$, が成り立つ.

このグループ分けを用いて, 解析解の導出を検討する.

まず, 陳列スペースが非常に大きい状況について検討する. つまり, 需要の期待値だけ陳列した場合, 空きスペースが顕著に見受けられる状況である. この状況を定式化すると,

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu_i \ll C \quad (24)$$

となる. この状況下では空きスペースを充填するために, 商品によっては, 陳列量を当該需要量の最大値 β_i 以上に増やすことになる. よって商品のグループ分けの標記を用いて, 式(4)の目的関数を次式のように書き換える.

$$\begin{aligned} \pi(Q) &\rightarrow \max, \\ \pi(Q) &= \sum_{i \in \mathcal{A}} p_i \int_0^{\infty} \min(Q_i, x) f_i(x) dx - \sum_{i \in \mathcal{A}} c_i Q_i \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{A}} v_i \int_0^{Q_i} (Q_i - x) f_i(x) dx - \sum_{i \in \mathcal{A}} h_i \int_{Q_i}^{\infty} (x - Q_i) f_i(x) dx \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{B}} p_i \int_0^{\infty} \min(Q_i, x) f_i(x) dx - \sum_{i \in \mathcal{A}} c_i Q_i \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{B}} v_i \int_0^{Q_i} (Q_i - x) f_i(x) dx - \sum_{i \in \mathcal{B}} h_i \int_{Q_i}^{\infty} (x - Q_i) f_i(x) dx \end{aligned} \quad (25)$$

同様に, 式(8)の制約条件も

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} w_i Q_i + \sum_{i \in \mathcal{B}} w_i Q_i = C \quad (26)$$

と書き換える．よって，需要が三角分布に従う場合の最適化問題は，以下の通り表現できる．

$$\pi(Q) \rightarrow \max, \text{subject to (26) and } Q_i \geq 0 \text{ for all } i (1 \leq i \leq n). \quad (27)$$

ただし， $\pi(Q)$ は，式(25)で定義されたものを用いる．

式(27)の最適化問題を，ラグランジュの未定乗数法で解く．式(10)のラグランジュ関数と式(13)のKKT条件を用いると，グループ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対し，相補性条件がそれぞれ以下の通り，成り立つ．

グループ $\mathcal{A}$ に対して，

- $\eta_i > 0$ ならば $Q_i = 0$ であり， $\eta_i = -U_i + \lambda w_i > 0$ が成り立つ．よって，未定乗数 λ に関して

$$\frac{U_i}{w_i} < \lambda \quad (28)$$

が成り立つ．

- $\eta_i = 0$ ならば $Q_i \geq 0$ であり， $\eta_i = -U_i + (E_i + U_i)F_i(0) + \lambda w_i = -U_i + \lambda w_i > 0$ が成り立つ．よって，最適解は

$$Q_i^* = F^{-1}\left(\frac{U_i - \lambda w_i}{E_i + U_i}\right). \quad (29)$$

グループ $\mathcal{B}$ に対して，

- $\eta_i > 0$ ならば $Q_i = 0$ であり， $\eta_i = -E_i + \lambda w_i > 0$ が成り立つ．よって，未定乗数 λ に関して

$$-\frac{E_i}{w_i} < \lambda \quad (30)$$

が成り立つ．

- $\eta_i = 0$ ならば $-E_i + \lambda w_i = 0$ が成り立つ. よって, 未定乗数 λ に関して

$$-\frac{E_i}{w_i} = \lambda \quad (31)$$

と解くことができる.

グループ $\mathcal{B}$ に属する商品について検討を進める. ここで, 集合 $\mathcal{P} \equiv \{i | (E_i/w_i) = \min_{j \in \mathcal{B}} (E_j/w_j)\}$ を定義する. $\mathcal{P}$ はグループ $\mathcal{B}$ に属し, 単位体積当たりの原価が最も安い商品群を意味する. この集合標記と式(31)を使い, 未定乗数 λ を以下のように決定する.

$$\lambda = -\frac{E_i}{w_i} (i \in \mathcal{P}). \quad (32)$$

続いて, $\mathcal{P}$ に属さない商品, つまり, 商品 $i \notin \mathcal{P}$ の扱いについて考える. グループ $\mathcal{B}$ に属する商品の陳列量は $Q_i > \beta_i$ となるため, $f_i(Q_i) = 0$ を満たす. この意味を解釈すると, 売れる見込みがない商品を需要の最大値より多く陳列することになり, 無駄な陳列政策といえる. そこで, 式(32)で未定乗数 λ を求めた後, 商品 $i \notin \mathcal{P}$ を, グループ $\mathcal{A}$ に移管することを提案する. これにより, 当該商品の陳列量を $Q_i \leq \beta_i$ まで減らすことができ, $f_i(Q_i) \neq 0$ が満たされ, 無駄な陳列を抑制することができる.

よって, 商品のグループ入れ替え作業の後, 式(14)中の未定乗数 λ に式(32)の λ を代入することで, 需要が三角分布に従う場合の最適解は求められる. ただし, 一点だけ注意すべき点がある. それは, 陳列対象となる商品 i の陳列量 Q_i が, 三角分布が持つ最頻値 γ_i より多くなるか否かで最適解を表す, 式(14)の関数 G_i の形が異なる点である. 事実, Q_i の範囲に応じて, 式(14)の関数 G_i は, 式(19)と式(20)と二つの形がある. このことに注意すれば, 商品の入れ替え作業を終えたグループ $\mathcal{A}$ に属する商品については, 以下の条件分けで最適解を得ることができる.

- $U_i / w_i < \lambda$ ならば,

$$Q_i^* = 0. \quad (33)$$

- $U_i / w_i > \lambda$, かつ $(U_i + \lambda w_i) / (E_i + U_i) < \gamma_i / \beta_i$ ならば,

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{\beta_i \gamma_i (U_i - \lambda w_i)}{(E_i + U_i)}}. \quad (34)$$

ただし λ は(32)で求められたものを用いる.

● $U_i/w_i > \lambda$, かつ $(U_i + \lambda w_i)/(E_i + U_i) \geq \gamma_i / \beta_i$ ならば,

$$Q_i^* = \beta_i - \sqrt{\frac{1 - (U_i - \lambda w_i)}{(E_i + U_i)}} \beta_i (\beta_i - \gamma_i). \quad (35)$$

ただし λ は式(32)で求められたものを用いる.

次に, グループ $\mathcal{B}$ に属する商品の最適解を求める. 式(33)–式(35)より, グループ $\mathcal{A}$ の商品の陳列量は既知であるため, 制約条件 式(26)は以下のように表せる.

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} w_k Q_k^* + \sum_{i \in \mathcal{B}} w_i Q_i^* = C. \quad (36)$$

添え字 k は最適陳列量が既知である商品を表す. よって, グループ $\mathcal{B}$ に属する商品 i の最適解は, 以下の方程式を満たす任意の値となる.

$$\sum_{i \in \mathcal{B}} w_i Q_i^* = C - \sum_{k \in \mathcal{A}} w_k Q_k^*. \quad (37)$$

特に, グループ $\mathcal{B}$ に属する商品が一つならば,

$$Q_i^* = \frac{C - \sum_{k \in \mathcal{A}} w_k Q_k^*}{w_i} \quad (38)$$

となる.

次に陳列スペースが非常に小さく, 全商品の陳列量を減らす, もしくは陳列する商品数を減らす政策を講じる必要がある状況について検討する. つまり, 需要の期待値だけ陳列しようとしても, 陳列スペースが不十分で陳列できない状況である. この状況を定式化すると,

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu_i \gg C. \quad (39)$$

となる. この状況では, 全商品の陳列量が当該商品の需要量の最大値 β_i よりも少なくなることが推測される. よって, 全商品がグループ $\mathcal{A}$ に属する. そのため, 以後, $\mathcal{A}$ と

いう表記は省略する.

この状況では, 商品のグループ分けの必要性がないため, 前章の式(9)を最適化問題として採用し, 解法も同様にラグランジュの未定乗数法を用いる. ここで, 集合 $Z \equiv \{i | 0 \leq Q_i < \gamma_i\}$ を定義する. Z は, 陳列量が当該商品の最頻値より少ない商品の集合を表す. この集合標記を用いると, 式(19)と式(20)はそれぞれ, 以下のように記述できる.

$$G_i(\lambda) = \sqrt{\frac{\beta_i \gamma_i (U_i - \lambda w_i)}{(E_i + U_i)}} \quad \text{for } i \in Z. \quad (40)$$

$$G_i(\lambda) = \beta_i - \sqrt{\frac{1 - (U_i - \lambda w_i)}{(E_i + U_i)}} \quad \text{for } i \notin Z. \quad (41)$$

よって, 制約条件 式(8)は以下のように表現できる.

$$\sum_{i \in Z} w_i G_i(\lambda) + \sum_{i \notin Z} w_i G_i(\lambda) = C. \quad (42)$$

未定乗数 λ を求めるためには, 式(42)を λ について解けばよい. しかし, 式(42)を λ について解くことは困難である. よって, 需要が三角分布に従うとき, 式(39)の状況における最適陳列量を解析解として与えることはできなかった. 最適陳列量を決定するためには, 式(42)を満たす未定乗数 λ をニュートン法などの反復法を用いて数値的に求めなければならない.

6.3 シミュレーションによる数値解の導出

本研究では, ある三商品 1, 2, 3 を仮定し, 二商品の場合と三商品の場合について, 6.2 節で求めた解析解に相関関係のある正規乱数を代入することで, 最適陳列量の数値解を求めるシミュレーションを行う. ただし, 各シミュレーションは 100 個の正規乱数を発生させ 100 回行う.

三商品の属性を表 3 に示す. ここで, 等式制約条件である陳列スペースの大きさを $C = 300$ と仮定し, 商品の最適陳列量を求める. ただし, 各商品の需要は $N(60, 10)$ に従う正規乱数で与え, このとき最頻値 γ_i は正規乱数の値を利用し, 最大値 β_i は 6.1 節より, $\beta_i = \mu + \sqrt{6}\sigma$ となるため $\beta_i = 85$ となる.

初めに, 陳列する商品が二商品の場合のシミュレーションを行う. シミュレーションは商品間の相関係数が 0, 0.9, -0.5 の場合の三パターンについて行う. 陳列スペース

の大きさを $C = 300$ と仮定すると、 $\sum_{i=1}^2 w_i \mu_i$ は陳列スペースよりも小さくなるため、式(24)で表される。つまり、需要の期待値だけ陳列しても、空きスペースが顕著にみられる状況である。ここで、単位体積当たりの原価が最も安い商品が、商品 1 であることに注目する。よって、 $\mathcal{P} = \{1\}$ を満たし、未定乗数 λ は式(32)より $\lambda = -1$ と決定される。 $\mathcal{P}$ に属さない商品 2 については、それぞれ $U_2/w_2 > \lambda = -1$ を満たす。さらに $(U_2 - \lambda w_2)/(E_2 + U_2) \geq \gamma_2/\beta_2$ も満たす。よって商品 2 については式(35)を、商品 1 については式(38)を用いることで最適陳列量を求められる。

まず、商品間の相関係数が 0 の場合の最適陳列量は

$$(Q_1^*, Q_2^*) = (236.7, 63.3) \quad (43)$$

と求められる。次に、商品間の相関係数が 0.9 の場合の最適陳列量は

$$(Q_1^*, Q_2^*) = (226.6, 73.4) \quad (44)$$

と求められる。最後に、商品間の相関係数が -0.5 の場合の最適陳列量は

$$(Q_1^*, Q_2^*) = (262.1, 37.9) \quad (45)$$

と求められる。ただし、各相関係数における商品 1, 2 の最適陳列量は 100 回のシミュレーション結果の平均値となっている。式(43), 式(44), 式(45)の陳列量を合計すると、陳列スペースの大きさである $C = 300$ と一致している。これは、陳列スペースを商品 1, 2 で埋めている状況である。また、商品 1 で陳列の空きスペースを埋めていることがわかる。

次に陳列する商品が三商品の場合のシミュレーションを行う。ただし、シミュレーションは(商品 1,2 の相関, 商品 1,3 の相関, 商品 2,3 の相関) = (0, 0, 0), (8, 5, 2), (7, 6, 7), (2, 3, 3), (5, -3, 5) の五パターンについて行う。

陳列スペースの大きさを $C = 300$ と仮定すると、 $\sum_{i=1}^3 w_i \mu_i$ は陳列スペースよりも小さくなるため、式(24)で表される。つまり、需要の期待値だけ陳列しても、空きスペースがみられる状況である。ここで、単位体積当たりの原価が最も安い商品が、商品 1 であることに注目する。よって、 $\mathcal{P} = \{1\}$ を満たし、未定乗数 λ は式(32)より $\lambda = -1$ と決定される。 $\mathcal{P}$ に属さない商品 2, 3 については、それぞれ $U_2/w_2 > \lambda = -1, U_3/w_3 > \lambda = -1$ を満たす。さらに、 $(U_2 - \lambda w_2)/(E_2 + U_2) \geq \gamma_2/\beta_2$, $(U_3 - \lambda w_3)/(E_3 + U_3) \geq \gamma_3/\beta_3$ も満たす。よって商品 2, 3 については式(35)を、商品 1 については式(38)を用いることで最適陳列量を求められる。

商品間の相関係数が (0, 0, 0) の場合の最適陳列量は

$$(Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*) = (183.3, 63.4, 53.3) \quad (46)$$

と求められる．次に商品間の相関係数が(8, 5, 2)の場合の最適陳列量は

$$(Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*) = (161.5, 75.3, 63.2) \quad (47)$$

と求められる．次に商品間の相関係数が(7, 6, 7)の場合の最適陳列量は

$$(Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*) = (146.5, 75.3, 78.2) \quad (48)$$

と求められる．次に商品間の相関係数が(2, 3, 3)の場合の最適陳列量は

$$(Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*) = (157.4, 71.2, 71.4) \quad (49)$$

と求められる．次に商品間の相関係数が(5, -3, 5)の場合の最適陳列量は

$$(Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*) = (167.8, 75.3, 56.9) \quad (50)$$

と求められる．ただし，各相関係数における商品 1, 2, 3 の最適陳列量は 100 回のシミュレーション結果の平均値となっている．式(46), 式(47), 式(48), 式(49), 式(50)の陳列量を合計すると，陳列スペースの大きさである $C = 300$ と一致している．これは，陳列スペースを商品 1, 2, 3 で埋めている状況であることがわかる．また，商品 1 で陳列の空きスペースを埋めていることがわかる．

表 3. 商品のテストパラメータ

項目	商品 1	商品 2	商品 3
売価 : p_i	3	5	7
原価 : c_i	1	2	3
残余処理費 : v_i	0	0	0
機会損失費 : h_i	0	0	0
占有体積 : w_i	1	1	1

6.4 評価

まず，対象とする商品が二商品の場合のシミュレーション結果の評価を行う．シミュレーション結果の散布図が図 4, 図 5, 図 6 である．また，図 7 は図 4, 図 5, 図 6 を一つのグラフにまとめたものである．図 4 は，商品間の需要の相関係数が 0.9, 図 5 は相関係数が-0.5, 図 6 は相関係数が 0 の場合の商品 1 と商品 2 の最適陳列量の散布図となっている．つまり，図の一点ずつが商品 1 と商品 2 の最適陳列量になる．図 4

は相関係数 0.9 と強い正相関を持っているため、商品 2 の陳列量が 図 6 の無相関の場合に比べ増加し、商品 1 の陳列量が減少していることがわかる。これは、商品 1 と商品 2 の間に強い正相関関係があるため、商品 2 の期待需要が増加しているためである。また、図 5 は商品 1 と商品 2 の間に負の相関があるため、図 6 と比べ、商品 2 の陳列量が減少し、商品 1 の陳列量が増加していることがわかる。これは、商品 1 と商品 2 の間に負の相関を持っているため、商品 2 の期待需要が減少し、空きスペースが増加してしまい、その空きスペースを商品 1 で埋めているためである。

次に、三商品の場合のシミュレーション結果の評価を行う。各商品の相関がない状況下での最適陳列量が式(46)となる。三商品が互いに強い相関を持っている場合の、最適陳列量である式(48)と式(46)を比べると商品 1 の陳列量が大きく変化している。これは、式(48)の各商品間の相関が強いため商品 2, 3 の陳列量が増加しているためである。

以上の結果から商品間の需要が相関を持っている場合と、商品間の需要に相関がない場合での最適陳列量では、大きく変化が起こることがわかる。

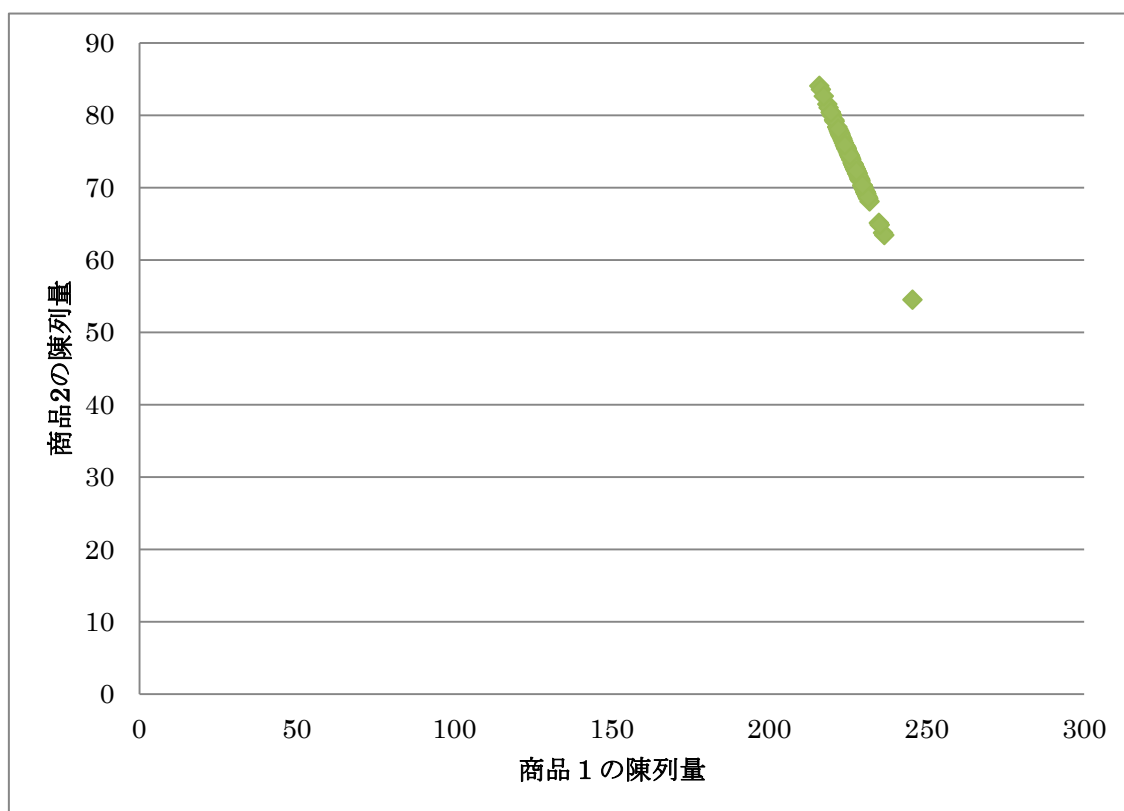


図 4 相関係数 $\rho=0.9$ のときの商品 1, 商品 2 の陳列量

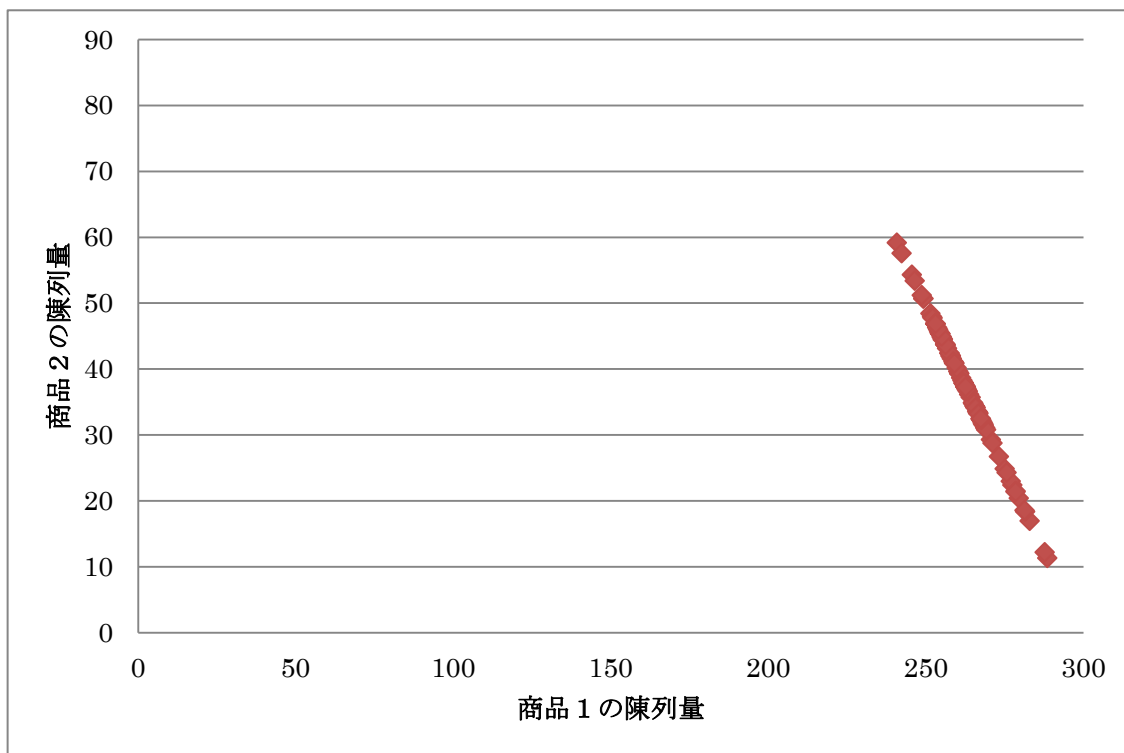


図 5 相関係数 $\rho=-0.5$ のときの商品 1, 商品 2 の陳列量

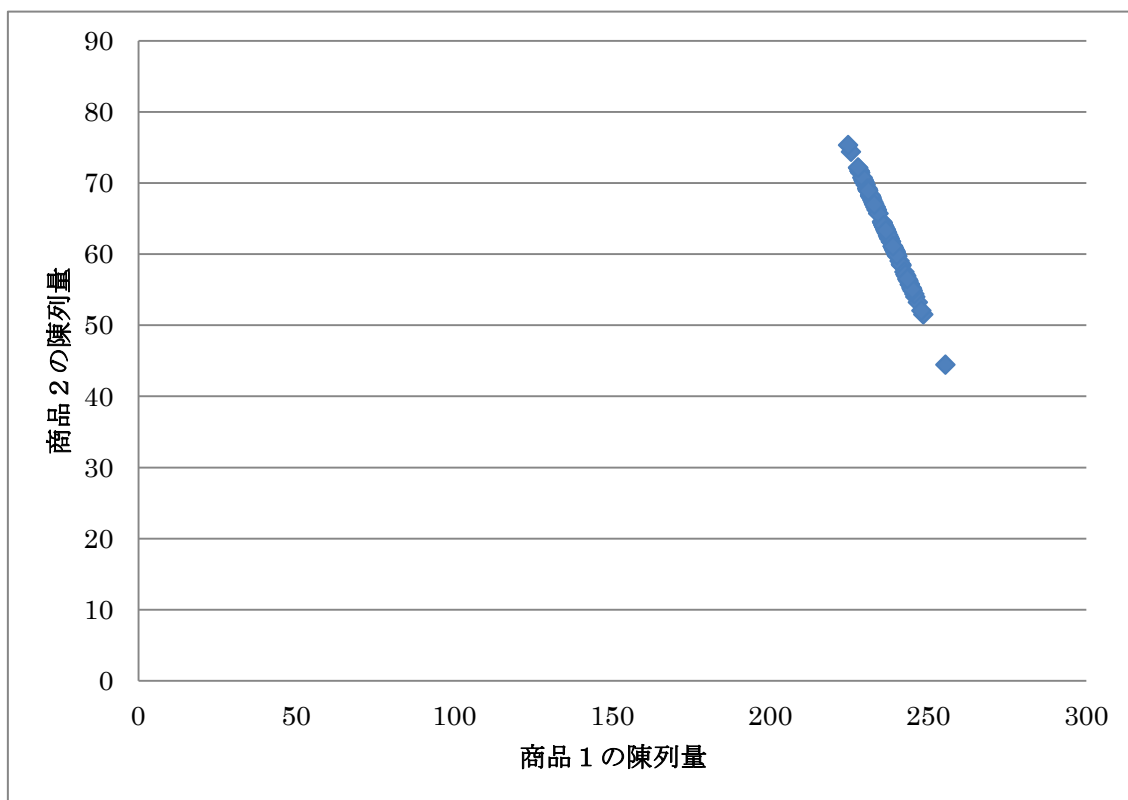


図 6 相関係数 $\rho=0$ のときの商品 1, 商品 2 の陳列量

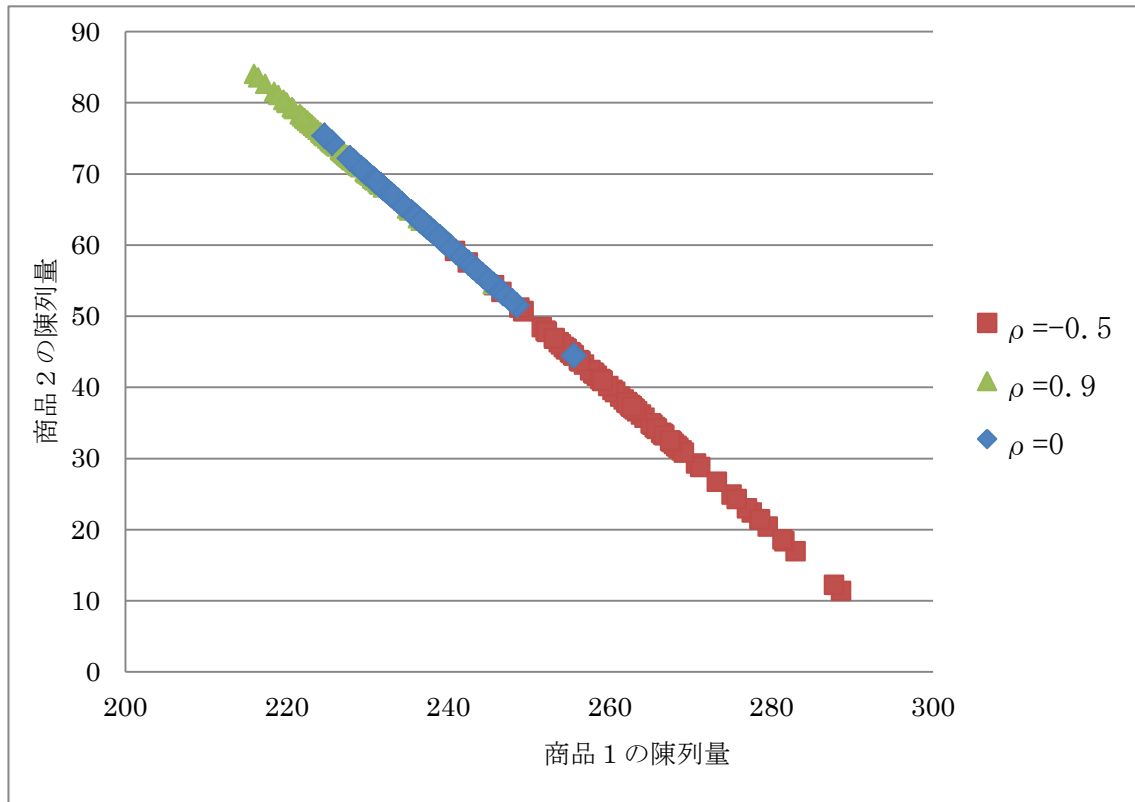


図 7 相関係数 $\rho=0.9, 0, -0.5$ のときの商品 1, 商品 2 の陳列量

6.5 考察

6.3 節, 6.4 節の考察を行う。まずは, 想定する商品数が二商品の場合について考察を行う。式(43), 式(44), 式(45)の結果から, 商品の需要が相関関係を持っている場合と相関関係を持っていない場合で商品の陳列量に変化がでることがわかった。まず, 式(43)と式(44)の結果から商品間の需要が強い相関を持っているときの陳列量は, 相関がない場合に比べ商品 2 の陳列量が増加していることが分かる。つまり, 商品の需要の間に強い相関関係があることを考慮せず, 商品の需要を独立とした陳列政策を行ってしまうと, 商品 2 の期待需要分の陳列を行うことができず, 損益を上げることとなる。つまり, リスク低減, 利益の増加の観点を満たすことができず最適な陳列政策とは言えない。同様に, 式(43)と式(45)の結果から二商品の需要の間に負の相関関係を持っているときの陳列量は, 相関がない場合に比べ商品 2 の陳列量が大幅に減少していることが分かる。つまり, 商品の需要の間に負の相関があることを考慮せず, 商品の需要が独立とした陳列政策を行ってしまうと, 商品 2 の陳列量が期待需要より大幅に多い商品を陳列してしまうこととなる。これは, リスク低減のために, 売り場の空きスペースを占有体積当たりの原価が安い商品 1 で埋めるという対策を行っていることに反し, 商品 2 の死蔵在庫のリスクを増加させてしまう陳列政策となってしまう。

次に扱う商品が三商品の場合, 式(46)と式(48)から商品間に強い相関関係がある場

合、商品 2 と商品 3 の陳列量が増加するため、売り場の空きスペースが減少し、商品 1 の陳列量も減少している。つまり、商品間の相関関係を考慮せず、商品の需要が独立とした陳列政策を行ってしまうと商品 2、商品 3 の期待需要量分の陳列を行うことができず、また商品 1 の陳列量については無駄な陳列が多くなってしまっている状態となっている。

つまり、本研究の結果として、扱う商品数が変化しても、リスク低減、利益増加の観点から最適な陳列政策を行う場合、商品間の相関関係の考慮をすることが必要であるとわかった。

7 章 結論

本論文では、SPA 型小売業において、売り場の陳列スペースを制約条件とし、期待利益の最大化の観点から商品の最適な陳列政策について提案した。SPA 型企業の形態をとる多くの企業では、取り扱う商品数が少なく、商品の期待需要分のみ陳列しても売り場のスペースを埋めることができない状況である。そこで、SPA 型企業は限られた商品で陳列スペースを埋める対策をとっている。しかし、扱う商品は PB 商品と呼ばれ、一商品あたりの利益率が高い反面、死蔵在庫になってしまうリスクが高い商品である。よって、リスク低減、利益最大化の観点から SPA 型企業における最適な陳列政策が必要である。

よって、本研究では三角分布の解析解を利用し、相関関係を持った正規乱数を商品の需要として解析解に代入することでシミュレーションを行い、需要の相関関係を考慮した最適陳列政策について考察を行った。

その結果、商品の陳列政策において、より現実的な陳列政策を行うためには相関関係の考慮が必要であることがわかった。特に扱う商品が二商品の場合、負の相関を持っているときの相関の考慮、また三商品の場合強い相関を持っている場合の考慮が必要であると言える。よって、本研究の考察は、より現実的な商品の陳列政策構築の一助となると考えられる。

参考文献

- [1] 菅沼拓也, “SPA 型小売業における商品の最適陳列量”, 長岡技術科学大学 工学研究科 修士論文 (2012)
- [2] Hadley, G. and Whitin, T. M., Analysis of Inventory Systems, Prentice-Hall, New Jersey(1963)
- [3] Nahmias, S. and Schmidt, C. P., An efficient heuristic for the multi-item newsboy problem with a single constraint, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 31, No 3, pp.463-474(1984)
- [4] 齋藤誠, “SPA 型小売業における在庫ポートフォリオモデルの構築”, 長岡技術科学大学 卒業論文 (2009)
- [5] Rajaram, K., Assortment planning in fashion retailing: methodology, application and analysis, European Journal of Operational Research, 129(1), pp. 186-208 (2001)
- [6] Broekmeulen, R.A.C.M., Van Donselaar, K., Fransoo, J.C., Van Woensel, T., Excess Shelf Space in Retail Stores: An Analytical Model and Empirical Assessment, Beat Working Paper pp.109(2004)
- [7] 森村英典, “統計・OR 活用事典”, 東京書籍(1984)
- [8] 田口玄一, “確立・統計”, 財団法人日本規格協会(2008)